

# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

**Oussama KHATIB**

---

COMMANDE DYNAMIQUE DANS L'ESPACE OPERATIONNEL  
DES ROBOTS MANIPULATEURS EN PRESENCE D'OBSTACLES

Soutenue le 19 Décembre 1980 devant la Commission d'Examen

MM. A. J. FOSSARD                      Président

H. GALLAIRE  
G. GIRALT  
J. F. LE MAITRE  
A. LIEGOIS  
M. LLIBRE  
J. VERTUT

}                      Examineurs





# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

**Oussama KHATIB**

---

COMMANDE DYNAMIQUE DANS L'ESPACE OPERATIONNEL  
DES ROBOTS MANIPULATEURS EN PRESENCE D'OBSTACLES

Soutenu le 19 Décembre 1980 devant la Commission d'Examen

MM. A. J. FOSSARD

Président

H. GALLAIRE  
G. GIRALT  
J. F. LE MAITRE  
A. LIEGOIS  
M. LLIBRE  
J. VERTUT

}  
Examineurs





لكم أحييني

A Laurence,

A Firas,

Et à tous mes amis.





Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au CENTRE D'ETUDES ET DE RECHERCHES DE TOULOUSE (CERT), au Département d'Etudes et de Recherches en Automatique (DERA).

Nous tenons à exprimer notre plus vive reconnaissance à *Monsieur PELEGRIN*, Directeur du CERT, pour avoir bien voulu nous accueillir dans son Etablissement.

Nous présentons toute notre gratitude à *Monsieur LE MAITRE*, qui en prêtant une attention toute particulière à notre recherche, nous a permis de mener à bien ce travail au Département d'Automatique.





Nos vifs remerciements vont également à  
*Monsieur FORESTIER*, responsable du Département d'Automatique,  
pour son soutien et la confiance qu'il nous a accordés  
au cours de cette étude.

Nous exprimons notre profonde gratitude à  
*Monsieur le Professeur FOSSARD*, qui nous a fait l'honneur de  
présider notre jury de thèse et nous le remercions pour  
ses précieuses remarques concernant ce mémoire.

Nous tenons également à remercier très vivement  
*Monsieur le Professeur GALLAIRE*, pour l'intérêt qu'il a  
manifesté à l'égard de nos travaux, qu'il soit assuré  
de toute notre reconnaissance pour sa participation à  
ce jury.

Nous sommes très sensibles à l'intérêt porté  
par *Monsieur GIRALT*, Directeur de Recherches au C.N.R.S.,  
à notre travail. Qu'il trouve ici l'expression de notre  
profonde gratitude pour avoir bien voulu faire partie  
de notre jury.





Nous adressons nos profonds remerciements à *Monsieur le Professeur LIEGEOIS* pour la confiance qu'il nous a accordée lorsqu'il nous a accueilli au L.A.M. et pour ses précieux conseils.

Que *Michel LLIBRE* soit cordialement remercié pour son amicale collaboration, ses conseils et ses critiques constructives prodigués tout au long de ce travail.

Nous témoignons notre profonde reconnaissance à *Monsieur VERTUT*, Directeur du Service STEPPA au CEA Saclay qui s'est intéressé à nos travaux et nous a fait l'honneur de siéger à ce jury.

Qu'il nous soit permis ici d'associer à tous ces remerciements la Direction de la Division des Automatismes de la Régie RENAULT pour sa collaboration technique et pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail.

Nos plus cordiaux remerciements vont aux ingénieurs et techniciens du D.E.R.A. et tout particulièrement à l'équipe de Robotique, pour leur amicale collaboration et la sympathie qu'il nous ont témoignées durant la réalisation de notre travail.





Nous remercions également les chercheurs des équipes de Robotique du L.A.M. et du L.A.A.S pour leurs encouragements et leur soutien amical.

Que *Wissama KHALIL*, *Roger MAMPEY* et *Marc RENAUD*, dont l'aide et les fructueuses discussions nous ont été précieuses trouvent ici le témoignage de notre profonde amitié.

Nos remerciements vont également à *Michel GRAU*, pour son aide et ses conseils relatifs au traitement sur ordinateur.

*Liliane ARENDO* a assuré, avec enthousiasme et compétence la dactylographie de notre manuscrit de thèse, qu'elle en soit très vivement remerciée.

Merci aussi à *Amer KHATIB* pour la note de fantaisie qu'il a apportée à ce mémoire par ses dessins d'animation.



## L 'AMOUR A LA ROBOTE

*Un homme écrit à la machine une lettre d'amour et la machine répond à l'homme et à la main et à la place de la destinataire*

*Elle est tellement perfectionnée la machine  
la machine à laver les chèques et les lettres d'amour*

*Et l'homme confortablement installé dans sa machine à habiter  
lit à la machine à lire la réponse de la machine à écrire*

*Et dans sa machine à rêver avec sa machine à calculer il  
achète une machine à faire l'amour*

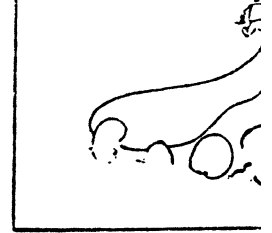
*Et dans sa machine à réaliser les rêves il fait l'amour  
à la machine à écrire à la machine à faire l'amour*

*Et la machine le trompe avec un machin  
un machin à mourir de rire*

*Jacques PREVERT*







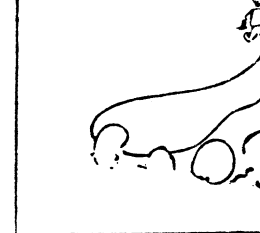
# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I : GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE DES ROBOTS MANIPULATEURS

- I.1 - INTRODUCTION
- I.2 - REPRESENTATION, TACHES ET COORDONNEES OPERATIONNELLES
- I.3 - MODELES GEOMETRIQUES
  - I.3.1 - DESCRIPTION DE LA CHAINE ARTICULEE
  - I.3.2 - COSINUS DIRECTEURS
  - I.3.3 - ANGLES D'EULER
  - I.3.4 - PARAMETRES D'OLINDE RODRIGUES
  - I.3.5 - MODELE GEOMETRIQUE INVERSE
- I.4 - MODELE VARIATIONNEL (CINEMATIQUE)
  - I.4.1 - MODELE CINEMATIQUE DE BASE
  - I.4.2 - MODELE CINEMATIQUE ASSOCIE A  $G^E$
  - I.4.3 - MODELE CINEMATIQUE ASSOCIE A  $G^R$
  - I.4.4 - MODELE CINEMATIQUE ASSOCIE A  $G^{DC}$
- I.5 - MODELE VARIATIONNEL INVERSE
  - I.5.1 - REDUCTION AU SYSTEME DE BASE
  - I.5.2 - REDUCTION AU SYSTEME PREFERENTIEL
- I.6 - PARAMETRES D'OLINDE RODRIGUES
  - I.6.1 - REPRESENTATION REDONDANTE UTILISANT LES POR
  - I.6.2 - REPRESENTATION NON REDONDANTE
- I.7 - CONCLUSION





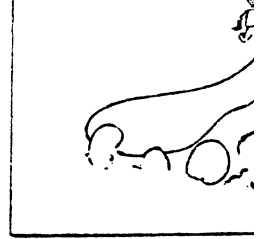
## CHAPITRE II : COMMANDE DYNAMIQUE

- II.1 - INTRODUCTION
- II.2 - MODELE DYNAMIQUE
- II.3 - ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE
  - II.3.1 - INFLUENCE DE LA VARIATION DE L'INERTIE  $a_{ii}$
  - II.3.2 - INFLUENCE DES PERTURBATIONS
- II.4 - COMMANDE DYNAMIQUE
  - II.4.1 - DECOUPLAGE DES MOUVEMENTS ARTICULAIRES
  - II.4.2 - SYSTEMES DE COMMANDE
- II.5 - CONCLUSION

## CHAPITRE III : SYNTHÈSE DE COMMANDE DYNAMIQUE DANS L'ESPACE OPERATIONNEL

- III.1 - INTRODUCTION
- III.2 - MODELE DYNAMIQUE DE L'EFFECTEUR
- III.3 - DECOUPLAGE DES MOUVEMENTS DE L'EFFECTEUR
  - III.3.1 - STRUCTURE CLASSIQUE DU SYSTEME DE COMMANDE
  - III.3.2 - NOUVELLE STRUCTURE DU SYSTEME DE COMMANDE
  - III.3.3 - PROBLEME DE LA MISE EN OEUVRE
- III.4 - PROPRIETES DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES
  - III.4.1 - PROPRIETES DU VECTEURS  $g(q)$
  - III.4.2 - PROPRIETES DE LA MATRICE JACOBIENNE  $J_E(q)$
  - III.4.3 - PROPRIETES DE LA MATRICE JACOBIENNE  $J_E^{OR}(q)$
  - III.4.4 - PROPRIETES DES MATRICES  $\Lambda(q)$ ,  $B(q)$  ET  $C^{OR}(q)$
- III.5 - MISE EN OEUVRE PAR LES TECHNIQUES D'APPROXIMATION MULTIVARIABLE
  - III.5.1 - DEVELOPPEMENT EN POLYNOMES DE LEGENDRE
  - III.5.2 - VARIATIONS DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES ET SINGULARITES
  - III.5.3 - BASE DE DEVELOPPEMENT ET COUPLE DE VARIABLES
  - III.5.4 - PERFORMANCES ET GENERALISATION
- III.6 - GENERALISATION AUX DIFFERENTES REPRESENTATIONS DE L'ORIENTATION
- III.7 - EXTENSION AUX SYSTEMES REDONDANTS
- III.8 - CONCLUSION





## CHAPITRE IV : PRISE EN COMPTE DES OBSTACLES ET DES CONSTRAINTES STRUCTURELLES

- IV.1 - INTRODUCTION
- IV.2 - SYSTEME DE COMMANDE ADAPTATIF
  - IV.2.1 - MODELISATION DE L'ENVIRONNEMENT
  - IV.2.2 - FONCTION DE FIRAS
  - IV.2.3 - ORGANISATION DU SYSTEME DE COMMANDE
- IV.3 - EXEMPLES D'APPLICATIONS
- IV.4 - CONCLUSION

## CONCLUSION GENERALE

## BIBLIOGRAPHIE

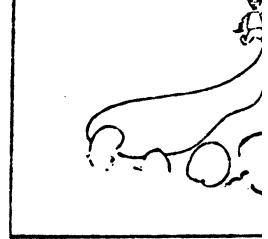
ANNEXE A1 : MATRICE JACOBIENNE  $J_o(q)$  DU ROBOT VERTICAL 80

ANNEXE A2 : MATRICE JACOBIENNE INVERSE  $J_o^{-1}(q)$  DU ROBOT  
VERTICAL 80

ANNEXE A3 : SYSTEMES DE COORDONNEES CONSERVANT  
L'OPERATEUR  $\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$

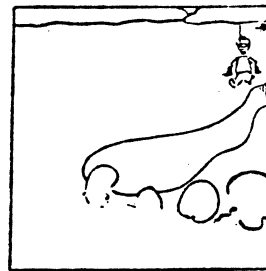






**I N T R O D U C T I O N**





Développée au cours de la dernière décennie, la ROBOTIQUE doit son essor à la convergence de plusieurs disciplines scientifiques et techniques notamment la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'informatique.

En quête de plus d'autonomie, les manipulateurs industriels amorcent une certaine convergence vers les robots relevant jusqu'alors de prototypes de laboratoire. Cette tendance trouve ses motivations dans le besoin croissant d'étendre l'automatisation industrielle à des tâches variées, de plus en plus complexes.

Ce besoin qui se fait sentir dans des domaines aussi variés que l'industrie, la médecine, l'océanographie ou l'espace a contribué à l'intensification des recherches sur les divers problèmes liés aux trois composantes d'un robot : la perception, la décision et la commande.

Nos travaux qui se situent au niveau de la commande ont eu pour objectif, le développement de systèmes de commande adaptatifs qui, tout en restant compatibles avec les moyens industriels actuels, soient susceptibles d'augmenter les performances de rapidité et de précision et de s'intégrer dans une structure plus évoluée de systèmes de commande.

Les systèmes de commande peuvent être caractérisés par leur capacité d'opérer des modifications au cours de l'évolution du robot afin de mener à bien la tâche à laquelle il est assigné.

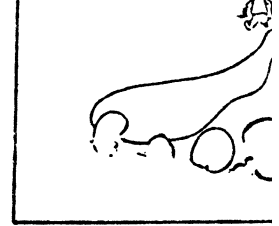
Cette caractéristique qui conditionne toute adaptativité de fonctionnement du système soulève, au niveau de la commande des robots manipulateurs, de sérieuses difficultés résultant de la conjugaison de deux types de problèmes :

- i) problème de la conversion, dans l'espace des coordonnées généralisées (espace de configuration), des entrées naturellement définies dans l'espace des coordonnées opérationnelles (espace de la tâche)
- ii) problème dynamique posé par l'accroissement rapide des effets des forces d'inertie, des forces centrifuges et des forces de Coriolis exercées sur le système dès que ses mouvements ne sont plus lents.

La modélisation et la synthèse de la commande dans l'espace opérationnel permet, comme nous allons le voir, d'aplanir en grande partie ces difficultés.

Le développement de nos travaux se divise en quatre chapitres :

- Seront développées, dans le premier chapitre, les relations géométriques et cinématiques permettant d'exprimer, en



fonction des paramètres de configuration du robot manipulateur, les coordonnées choisies pour la description de tâches et pour la représentation de l'organe terminal. Le problème de transformation inverse des coordonnées trouve, par l'approche analytique développée dans ce chapitre, des solutions nouvelles et intéressantes.

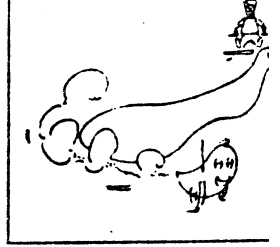
- Nous analyserons, dans le second chapitre, l'influence des perturbations dynamiques sur les performances recherchées et nous dégagerons des conclusions importantes concernant les simplifications généralement pratiquées. Les principaux systèmes de commande dynamique assurant le découplage des mouvements articulaires seront examinés.

- Dans le troisième chapitre, l'approche nouvelle de la commande dynamique dans l'espace opérationnel des robots manipulateurs sera développée. Cette approche résulte de l'élaboration du modèle dynamique régissant les mouvements de l'organe terminal et de l'utilisation d'un nombre de propriétés relatives aux éléments de ce modèle.

- Le quatrième chapitre est consacré aux problèmes posés par la prise en compte des obstacles et des contraintes structurelles auxquels le robot est confronté. Une approche nouvelle permettant de traiter ce problème au niveau (hiérarchique le plus bas) du système de commande sera développée.



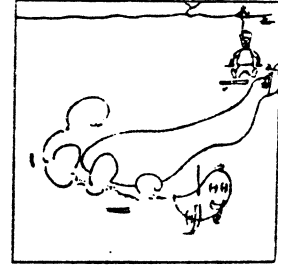




# CHAPITRE I

## GÉOMETRIE ET CINÉMATIQUE DES ROBOTS MANIPULATEURS





## I.1 - INTRODUCTION

Destinés à agir dans l'environnement grâce aux organes terminaux dont ils sont dotés, les robots manipulateurs évoluent dans leur propre espace dit espace de configuration, de telle sorte que les tâches auxquelles ils ont été assignés soient assurées.

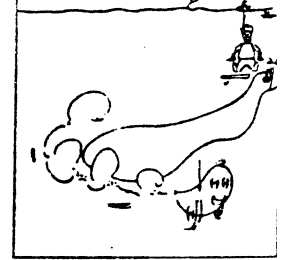
D'une manière générale, l'action d'un robot manipulateur est essentiellement caractérisée par l'évolution, tant dans l'espace que dans le temps, de la position et de l'orientation de son organe terminal, des forces et des couples que ce dernier exerce sur l'environnement. Un ensemble de contraintes concernant les limitations structurelles du système et son interaction avec l'environnement peut, comme nous le verrons au chapitre IV, être spécifié [KUL 76, FRC 77, AKS 78, KHA 78 B].

L'organe terminal ou l'effecteur est la partie du système la plus étroitement liée à la tâche. Ainsi la description de tâches se fait à l'aide de grandeurs qui se rattachent à cet organe terminal. Le choix de ces grandeurs et l'établissement des relations géométriques et cinématiques entre elles et les grandeurs mesurables du système (positions, vitesses, accélérations, forces et couples articulaires), ont donné naissance à de nombreux travaux sur la géométrie et la cinématique des mécanismes articulés sur lesquels nous reviendrons au cours de ce chapitre. Aussi, la conception et le dimensionnement de structure de ces mécanismes ont été parmi les principaux thèmes faisant appel à la synthèse géométrique et cinématique des robots manipulateurs [PI68, SHI 76, ROT 76, SHI 78].

Dans ce chapitre, les modèles géométriques et cinématiques associés aux principales représentations de la configuration de l'effecteur d'un robot manipulateur sont élaborés. Un accent particulier est mis sur les représentations utilisant les coordonnées opérationnelles.

Une partie importante, dans ce chapitre, est consacrée au problème des transformations inverses des coordonnées. L'étude qui y est menée, contribue à une très sensible réduction de la complexité de ce problème.

Ce chapitre s'achève sur le développement de deux approches permettant l'utilisation des paramètres d'Olindes Rodrigues dans la représentation de l'orientation de l'effecteur.



## I.2 - REPRESENTATION, TACHES ET COORDONNEES OPERATIONNELLES

La configuration de la chaîne des corps articulés constitutifs d'un mécanisme à  $n$  degrés de liberté de robot manipulateur est définie par  $n$  grandeurs indépendantes appelées *coordonnées généralisées*.

La représentation de la configuration de l'organe terminal se fait à l'aide de  $m$  paramètres définissant, dans un repère de référence  $R_0$ , sa position et son orientation. Ces  $m$  paramètres seront appelés *paramètres de configuration de l'effecteur*. Le système de  $m$  équations qui les exprime en fonction de  $n$  coordonnées généralisées est dit *modèle géométrique du robot manipulateur*.

Soit  $\chi$  le vecteur dont les composantes sont les  $m$  paramètres de configuration de l'effecteur. En désignant par  $q$  le vecteur des  $n$  coordonnées généralisées, le modèle géométrique est représenté par :

$$\chi \triangleq G(q) \quad (1.1)$$

Toute tâche  $\kappa$  portant sur le mouvement de l'organe terminal est décrite par la donnée de l'évolution, lorsqu'il s'agit d'une tâche à mouvement imposé, ou des valeurs, pour une tâche à configuration finale à atteindre de  $m_\kappa$  paramètres parmi les  $m$  paramètres de configurations de l'effecteur ( $m_\kappa \leq m$ ). Ces  $m_\kappa$  paramètres que nous noterons  $\chi_\kappa$  seront appelés *paramètres de configuration de tâche*.

Le système de  $m$  équations exprimant les paramètres de configurations de la tâche en fonction des  $n$  coordonnées généralisées est dit *modèle géométrique de la tâche* [FOU 80], il s'écrit :

$$\chi_\kappa \triangleq G_\kappa(q) \quad (1.2)$$

La tâche  $\kappa$  est décrite par l'évolution, dans un intervalle de temps, des paramètres  $\chi_\kappa$  ou encore par la donnée des valeurs finales qu'ils doivent atteindre au bout d'un temps  $t_f$ . Suivant la tâche  $\kappa$  un deux ou trois points fixes de l'organe terminal sont astreints à évoluer dans des domaines de l'espace à trois dimensions ou à les atteindre. Lorsque la tâche  $\kappa$  spécifie d'une façon complète l'évolution ou la configuration finale de l'organe terminal, ces domaines se réduisent à des trajectoires ou à des points de cet espace. Dans ce cas, et pour un choix donné de paramètres, les deux systèmes (1.1) et (1.2) sont identiques. Les paramètres  $\chi_\kappa$  représentatifs de la configuration d'une tâche  $\kappa$  sont un sous-ensemble des  $m$  paramètres  $\kappa$  représentatifs de la configuration de l'effecteur et l'on peut établir, la relation :

$$\chi_\kappa = \varepsilon_\kappa \chi \quad (1.3)$$

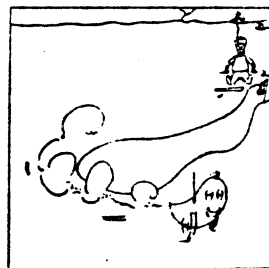
où  $\varepsilon_\kappa$  est une matrice qui dépend de la tâche  $\kappa$  ; elle est de dimensions  $m_\kappa \times m$  et de rang  $m_\kappa$ . Une ligne ou une colonne de  $\varepsilon_\kappa$  contient au plus un élément non nul égal à l'unité.

Deux types de paramètres de configurations de l'effecteur ou de la tâche peuvent être distingués :

i) Paramètres indépendants : suivant le système, une à trois coordonnées de position (coordonnées cartésiennes, sphériques ou cylindriques) et une à trois grandeurs angulaires (différents choix d'angles d'Euler) sont utilisées pour définir, dans un référentiel  $R_0$ , la position et l'orientation d'un repère  $R$  lié à l'organe terminal ( $m \leq n$  et  $m \leq 6$ ) [KUL76, ZAB79]

ii) Paramètres dépendants : généralement, la dépendance de paramètres porte sur les grandeurs définissant les rotations de l'organe terminal. Les principaux paramètres utilisés sont : les cosinus directeurs des vecteurs unitaires du repère  $R$  dans  $R_0$  [PIE68, FOU80] ; les composantes d'un vecteur fixe dans  $R$  et la mesure de la rotation de l'organe terminal autour de son support [MAK 76] ; ou les quaternions [TAY79, REN80A] ou les paramètres de l'Olinde Rodrigues (cf § 1.3.4).





### Définition 1.2.1

Nous appelons *coordonnées opérationnelles*, les paramètres de configurations de l'effecteur lorsque ceux-ci sont indépendants.

Il importe quant à la multitude de représentations proposées de bien voir que pour justifier un choix, on se réfère implicitement au mode de commande qui sera dit *commande dans l'espace de coordonnées généralisées*. Dans ce mode, la commande tend à assurer la poursuite de l'évolution des coordonnées généralisées obtenue par la résolution du modèle géométrique ou variationnel (cf § 1.4).

Comme nous le verrons, l'un des principaux avantages des représentations effectuées à l'aide de coordonnées opérationnelles est de permettre l'obtention d'un modèle dynamique régissant les mouvements de l'organe terminal. Des possibilités nouvelles sont alors offertes pour contrôler le comportement dynamique de cette partie, essentielle, du système (cf chapitre III).

Le nombre de coordonnées opérationnelles est uniquement lié à la structure mécanique du système ; ce nombre qui sera noté  $m_0$  caractérise la mobilité du système en dehors des singularités (cf § 1.4.1).

### Définition 1.2.2

Nous appelons *degré de liberté de l'effecteur*, le nombre  $m_0$  de coordonnées opérationnelles nécessaires à la représentation de ses configurations.

La redondance de la structure mécanique d'un manipulateur vis à vis du positionnement et de l'orientation de son effecteur est liée à la différence entre le nombre de ses coordonnées généralisées et celui de ses coordonnées opérationnelles.

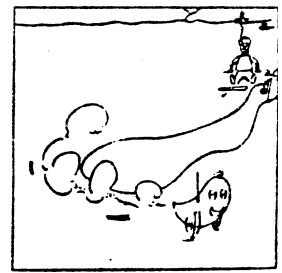
### Définition 1.2.3

Le nombre  $n - m_0$  est le *degré de redondance du robot manipulateur*. Lorsque  $n - m_0$  est non nul, le système est dit *redondant*.

Définition 1.2.4

"Le degré de redondance d'un robot manipulateur vis à vis d'une tâche" est le nombre  $n - m_{o_K}$ , où  $m_{o_K}$  est le nombre de coordonnées opérationnelles nécessaires à la représentation de la configuration de cette tâche

Signalons que la description de tâches à évolutions imposées peut être effectuée à partir des vitesses de déplacement et de rotation de l'organe terminal, quantités ne dérivant pas forcément de paramètres de configuration [WHI72, VER75]. Ce type de description s'inscrit dans le cadre plus général de l'approche cinématique ou variationnelle du problème de l'inverse comme nous le verrons par la suite.



### I.3 - MODELES GEOMETRIQUES

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux différents choix de paramètres et aux relations de ceux-ci avec les coordonnées généralisées.

Nous nous plaçons dans le cas général des systèmes redondants à effecteurs évoluant dans l'espace à trois dimensions i.e.  $m_0 = 6$  et  $n \geq m_0$ .

La position d'un point de l'organe terminal est alors définie par la donnée de trois grandeurs indépendantes. L'emplacement de ce point est généralement fixé à l'extrémité ou au centre de masse de l'organe terminal, ou encore au point  $O_n$  de sa liaison avec le corps antécédent de la chaîne articulée.

Notons qu'en  $O_n$  concourent les axes des trois dernières notations (cf figure 1.1) de nombreux robots industriels (MA23, Polar, Renault, Roman, Tosman, Unimation, Versatran...) [GOR 79]. Le choix du point  $O_n$  pour définir la position de l'organe terminal permet de simplifier non seulement le modèle géométrique du système mais aussi son modèle variationnel (cf § 1.4). Toutefois, un tel choix ne peut, dans le cas général de tâches, être retenu.

La position de l'organe terminal sera définie par les coordonnées dans un repère fixe arbitraire, d'un point  $O_E$  de l'axe passant par le point  $O_n$  et par le centre de masse de l'organe terminal. Ce dernier sera supposé animé d'un mouvement rotatif autour de cet axe.

L'orientation de l'organe terminal sera définie par la rotation relative au repère fixe, d'un repère d'origine  $O_n$ .

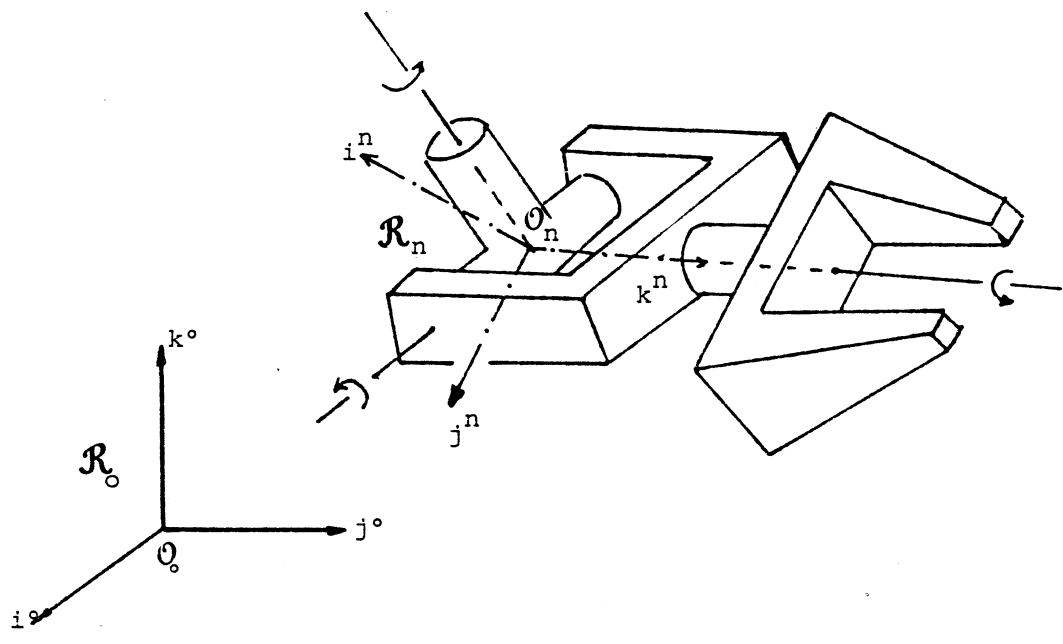
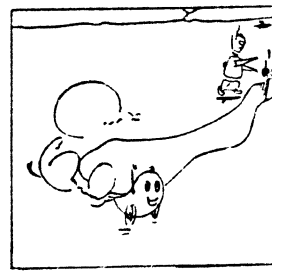


FIGURE 1.1 : Exemple d'un organe terminal



### I.3.1 - DESCRIPTION DE LA CHAÎNE ARTICULÉE

Considérons une chaîne articulée constituée de  $n$  corps mobiles  $C_1 (1 = 1, 2, \dots, n)$  et d'un corps fixe  $C_0$  liés par  $n$  articulations à un degré de liberté. Associons à l'articulation  $1$  deux points  $O_1^-$  et  $O_1^+$  appartenant respectivement aux corps  $C_{1-1}$  et  $C_1$ . Pour une articulation de type rotatif, ces points sont confondus en un point que l'on notera  $O_1$ . Le sens de rotation sera défini par un vecteur unitaire  $Z^1$ , le scalaire  $\gamma_1$  représentera sa mesure algébrique. Dans le cas d'une translation  $Z^1$  sera dirigé suivant  $\overrightarrow{O_1^- - O_1^+}$  et la mesure algébrique  $\left[ \overrightarrow{O_1^- - O_1^+} \right]$  sera représentée par le scalaire  $\tau_1$  (cf figure 1.2).

En introduisant le paramètre binaire  $\rho_1$  indiquant la nature de l'articulation :

$$\rho_1 = \begin{cases} 0 & \text{pour une rotation} \\ 1 & \text{pour une translation} \end{cases} \quad (1.4)$$

la  $1^{\text{ième}}$  coordonnée généralisée  $q_1$  s'écrit :

$$q_1 = \bar{\rho}_1 \gamma_1 + \rho_1 \tau_1$$

avec  $(1 = 1, 2, \dots, n)$  (1.5)

$$\bar{\rho}_1 \triangleq 1 - \rho_1$$

la  $n^{\text{ième}}$  coordonnée généralisée étant supposée de type rotatif, le paramètre associé s'écrit :

$$\rho_n = 0 \quad (1.6)$$

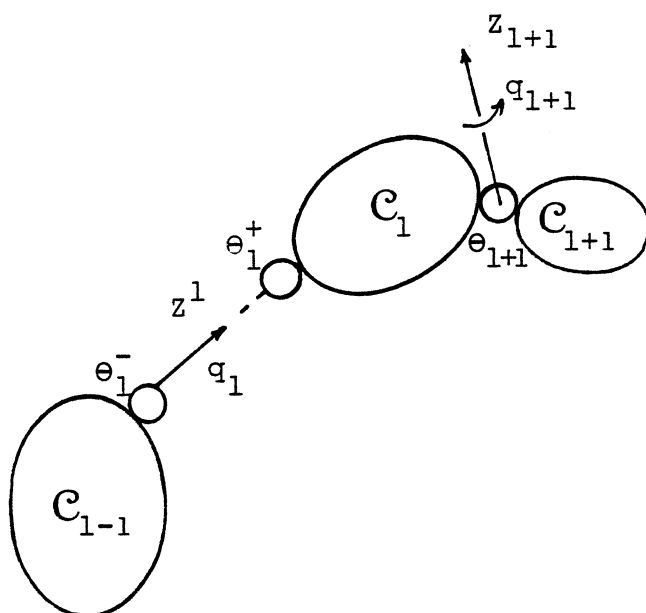


FIGURE 1.2 : Définition des coordonnées généralisées

Lions à chaque corps  $C_1$  ( $1 = 1, 2, \dots, n$ ) un repère orthonormé  $\mathcal{R}_1$  d'origine  $\mathcal{O}_1^+$  et de vecteurs unitaire  $i^1, j^1$  et  $k^1$  choisis de façon à diriger  $k^1$  suivant  $Z^1$ . Le repère fixe  $\mathcal{R}_0$  sera choisi de telle sorte que  $i^0$  soit perpendiculaire à la verticale ascendante et que  $k^0$  soit dirigé suivant  $Z^1$ . De plus, pour simplifier le développement de calcul, l'origine  $\mathcal{O}_0$  sera confondue avec le point  $\mathcal{O}_1^-$  (cf figure 1.3).  $\mathcal{O}_E$  désigne le point dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}_0$  définissent la position de l'organe terminal, le vecteur  $\overrightarrow{\mathcal{O}_n^+ \mathcal{O}_E}$  que l'on notera  $L^{n(n+1)}$  satisfait d'après le choix de l'emplacement de  $\mathcal{O}_E$ , la relation :

$$L^{n(n+1)} = l_E Z^n \quad (1.7)$$

avec

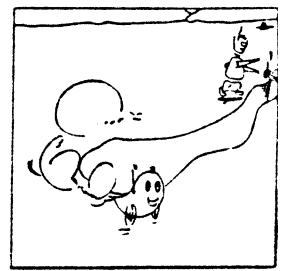
$$l_E \triangleq \left| \overrightarrow{\mathcal{O}_n^+ \mathcal{O}_E} \right|$$

Introduisons les  $n$  vecteurs  $M^{(1-1)1}$  ( $1 = 1, 2, \dots, n$ ) définis par

$$M^{(1-1)1} \triangleq \begin{cases} \vec{0} & 1 = 1 \\ \overrightarrow{\mathcal{O}_{1-1}^+ \mathcal{O}_1^-} & 1 = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (1.8)$$

Le passage du repère  $\mathcal{R}_{1-1}$  au repère  $\mathcal{R}_1$  ( $1 = 1, 2, \dots, n$ ) se

fait :



i) par une translation de vecteur  $L^{(l-1)l}$  définie par :

$$L^{(l-1)l} \underline{\underline{M}}^{(l-1)l} + \rho_l q_l z^l \quad (l=1,2,\dots,n) \quad (1.9)$$

ii) par trois rotations successives d'angles d'Euler  $\psi_l$  (précession),  $\theta_l$  (nutation) et  $\gamma_l$  (rotation propre).

Un choix approprié des zéros des rotations  $\gamma_l$ , permet d'après la définition des repères  $\mathcal{R}_l$  ( $l=1,2,\dots,n$ ) d'écrire :

$$\psi_l = \theta_l = 0 \quad (1.10)$$

et

$$\phi_l = \bar{\rho}_l \gamma_l \quad (l=1,2,\dots,n) \quad (1.11)$$

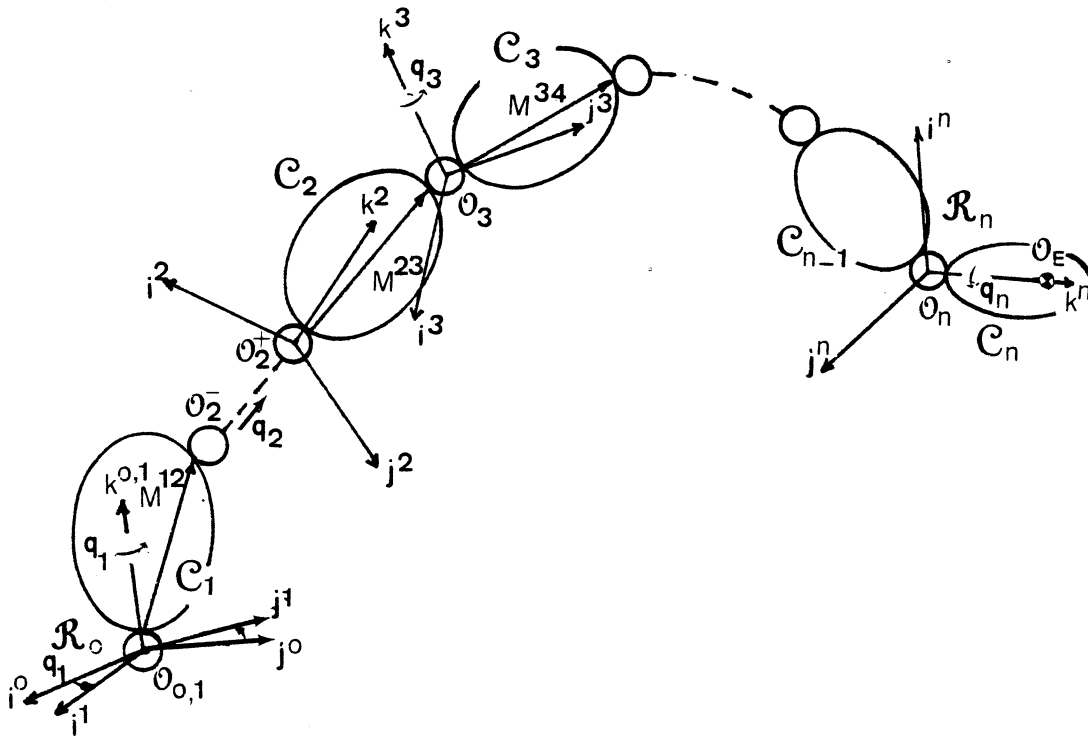


FIGURE 1.3 : Exemple d'une chaîne articulée

La matrice de composantes, dans un repère  $\mathcal{R}_k$ , d'un vecteur  $V$  sera notée  $V^{(k)}$ . De plus, afin de simplifier l'écriture, nous écrivons  $Z^k$ ,  $M^{kl}$ ,  $L^{kl}$  à la place de  $Z^{k(k)}$ ,  $M^{kl(k)}$  et  $L^{kl(k)}$ .

La matrice de passage généralisée, d'ordre 4, permettant d'exprimer les coordonnées, dans un repère  $\mathcal{R}_{1-1}$ , d'un point en fonction de ses coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}_1$  est définie par :

$$P^{(1-1)1} \triangleq \left[ \begin{array}{ccc|c} S^{(1-1)1} & & & L^{(1-1)1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.12)$$

avec

$$S^{(1-1)1\Delta} = S_{\psi_1} \quad S_{\theta_1} \quad S_{\varphi_1} \quad (1.13)$$

où  $S_{\psi_1}$ ,  $S_{\theta_1}$  et  $S_{\varphi_1}$  sont les trois matrices orthogonales correspondantes aux trois rotations d'angles d'Euler  $\psi_1$ ,  $\theta_1$  et  $\varphi_1$  définies par :

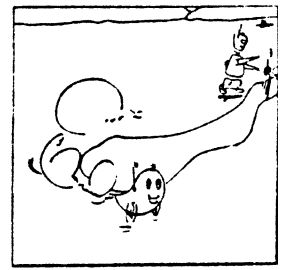
$$S_{\psi_1} \triangleq \begin{bmatrix} c_{\psi_1} & s_{\psi_1} & 0 \\ -s_{\psi_1} & c_{\psi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{\theta_1} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} \\ 0 & s_{\theta_1} & c_{\theta_1} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

et

$$S_{\varphi_1} \triangleq \begin{bmatrix} c_{\varphi_1} & s_{\varphi_1} & 0 \\ -s_{\varphi_1} & c_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





dans lesquelles  $c$  et  $s$  représentent, respectivement les fonctions trigonométriques  $\sin$  et  $\cos$ .

Comme les matrices de rotation  $S^{kl}$ , les matrices de passage généralisées possèdent la propriété de transitivité :

$$P^{kl} = \prod_{i=k}^{l-1} P^{i(i+1)} \quad (1.15)$$

La matrice  $P^{kl}$  s'écrit :

$$P^{kl} = \left[ \begin{array}{c|c} S^{kl} & L^{kl} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.16)$$

avec

$$S^{kl} = \prod_{i=k}^{l-1} S^{i(i+1)} \quad (1.17)$$

et

$$L^{kl} = L^{k(k+1)} + \sum_{i=k+1}^{l-1} S^{i(i+1)} L^{i(i+1)} \quad (1.18)$$

Le modèle géométrique du robot manipulateur s'obtient à partir des informations contenues dans la matrice de passage généralisée  $P^{0n}$  et du vecteur  $L^{n(n+1)}$ .

Décomposons la matrice du vecteur  $\chi$  des paramètres de configurations de l'organe terminal en deux blocs :  $L$  et  $R$  correspondant respectivement aux paramètres de position et d'orientation de l'organe terminal, soit :

$$\chi = \left[ \begin{array}{c} L^T \\ R^T \end{array} \right]^T \quad (1.19)$$

Les paramètres de position peuvent être les coordonnées sphériques cylindriques ou cartésiennes, nous adopterons ces dernières qui sont les plus répandues.

L est donc le vecteur des trois coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  du point  $\mathcal{O}_E$  dans  $\mathcal{R}_0$ , il est d'après la définition de la matrice de passage généralisée, donné par :

$$\left| \begin{array}{c} L \\ \hline 1 \end{array} \right| = P^{on} \left| \begin{array}{c} L^{n(n+1)} \\ \hline 1 \end{array} \right| \quad (1.20)$$

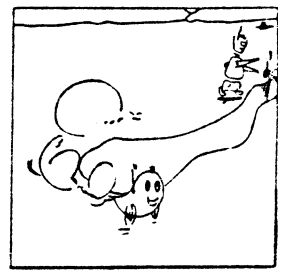
En désignant par  $P_{ij}(q)$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ), les éléments de la matrice  $P^{on}$  exprimés en fonction des coordonnées généralisées, les expressions des composantes du vecteur  $L$  sont d'après (1.7), (1.16) (1.18) et (1.20) données par

$$L(q) \triangleq \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} P_{14}(q) + P_{13}(q) \ 1_E \\ P_{24}(q) + P_{23}(q) \ 1_E \\ P_{34}(q) + P_{33}(q) \ 1_E \end{array} \quad (1.21)$$

L'information sur l'orientation de l'organe terminal est contenue dans le bloc  $S^{on}$  de la matrice  $P^{on}$  ; la matrice de passage  $S^{on}$  ou plus simplement  $S$  est formée par les trois colonnes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  regroupant les composantes, dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , des trois vecteurs unitaires du repère  $\mathcal{R}_n$  lié à l'organe terminal :

$$S(q) \triangleq S^{on}(q) \triangleq |e_1(q) \ e_2(q) \ e_3(q)| \quad (1.22)$$

Avant d'examiner les différents choix de paramètres d'orientation, i.e. choix du vecteur  $R$ , nous expliciterons les matrices  $L(q)$  et  $S(q)$  dans le cas du robot vertical 80 dont les paramètres géométriques et les différents repères sont portés ou définis (en fixant le sens de la rotation) sur la figure 1.4.



i) par une translation de vecteur  $L^{(l-1)l}$  définie par :

$$L^{(l-1)l} \underline{\underline{M}}^{(l-1)l} + \rho_l q_l z^l \quad (l=1,2,\dots,n) \quad (1.9)$$

ii) par trois rotations successives d'angles d'Euler  $\psi_l$  (précession),  $\theta_l$  (nutation) et  $\gamma_l$  (rotation propre).

Un choix approprié des zéros des rotations  $\gamma_l$ , permet d'après la définition des repères  $\mathcal{R}_l$  ( $l=1,2,\dots,n$ ) d'écrire :

$$\psi_l = \theta_l = 0 \quad (1.10)$$

et

$$\phi_l = \bar{\rho}_l \gamma_l \quad (l=1,2,\dots,n) \quad (1.11)$$

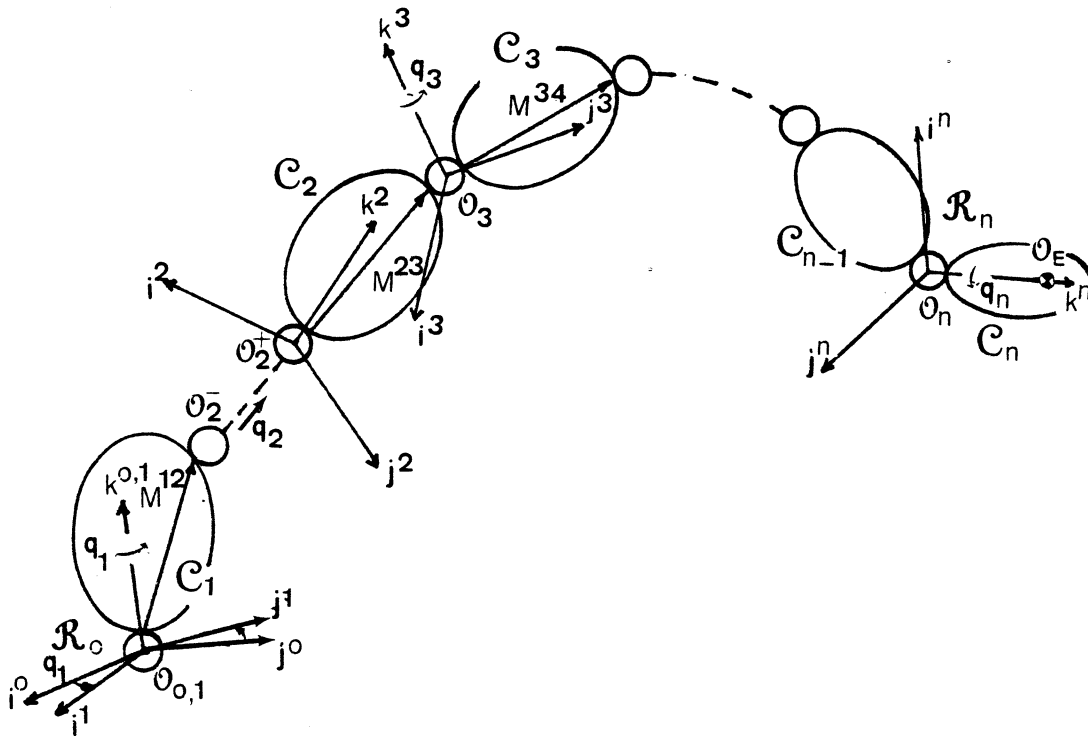


FIGURE 1.3 : Exemple d'une chaîne articulée

La matrice de composantes, dans un repère  $\mathcal{R}_k$ , d'un vecteur  $V$  sera notée  $V^{(k)}$ . De plus, afin de simplifier l'écriture, nous écrivons  $Z^k$ ,  $M^{kl}$ ,  $L^{kl}$  à la place de  $Z^{k(k)}$ ,  $M^{kl(k)}$  et  $L^{kl(k)}$ .

La matrice de passage généralisée, d'ordre 4, permettant d'exprimer les coordonnées, dans un repère  $\mathcal{R}_{1-1}$ , d'un point en fonction de ses coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}_1$  est définie par :

$$P^{(1-1)1} \triangleq \left[ \begin{array}{ccc|c} S^{(1-1)1} & & & L^{(1-1)1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.12)$$

avec

$$S^{(1-1)1\Delta} = S_{\psi_1} \quad S_{\theta_1} \quad S_{\varphi_1} \quad (1.13)$$

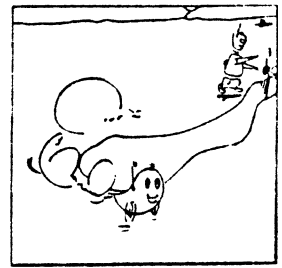
où  $S_{\psi_1}$ ,  $S_{\theta_1}$  et  $S_{\varphi_1}$  sont les trois matrices orthogonales correspondantes aux trois rotations d'angles d'Euler  $\psi_1$ ,  $\theta_1$  et  $\varphi_1$  définies par :

$$S_{\psi_1} \triangleq \begin{bmatrix} c_{\psi_1} & s_{\psi_1} & 0 \\ -s_{\psi_1} & c_{\psi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{\theta_1} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} \\ 0 & s_{\theta_1} & c_{\theta_1} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

et

$$S_{\varphi_1} \triangleq \begin{bmatrix} c_{\varphi_1} & s_{\varphi_1} & 0 \\ -s_{\varphi_1} & c_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



dans lesquelles  $c$  et  $s$  représentent, respectivement les fonctions trigonométriques  $\sin$  et  $\cos$ .

Comme les matrices de rotation  $S^{kl}$ , les matrices de passage généralisées possèdent la propriété de transitivité :

$$P^{kl} = \prod_{i=k}^{l-1} P^{i(i+1)} \quad (1.15)$$

La matrice  $P^{kl}$  s'écrit :

$$P^{kl} = \left[ \begin{array}{ccc|c} S^{kl} & & & L^{kl} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.16)$$

avec

$$S^{kl} = \prod_{i=k}^{l-1} S^{i(i+1)} \quad (1.17)$$

et

$$L^{kl} = L^{k(k+1)} + \sum_{i=k+1}^{l-1} S^{i(i+1)} L^{i(i+1)} \quad (1.18)$$

Le modèle géométrique du robot manipulateur s'obtient à partir des informations contenues dans la matrice de passage généralisée  $P^{0n}$  et du vecteur  $L^{n(n+1)}$ .

Décomposons la matrice du vecteur  $\chi$  des paramètres de configurations de l'organe terminal en deux blocs :  $L$  et  $R$  correspondant respectivement aux paramètres de position et d'orientation de l'organe terminal, soit :

$$\chi = \left[ \begin{array}{c|c} L^T & R^T \end{array} \right]^T \quad (1.19)$$

Les paramètres de position peuvent être les coordonnées sphériques cylindriques ou cartésiennes, nous adopterons ces dernières qui sont les plus répandues.

L est donc le vecteur des trois coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  du point  $O_E$  dans  $\mathcal{R}_0$ , il est d'après la définition de la matrice de passage généralisée, donné par :

$$\left| \begin{array}{c} L \\ \hline 1 \end{array} \right| = P^{on} \left| \begin{array}{c} L^{n(n+1)} \\ \hline 1 \end{array} \right| \quad (1.20)$$

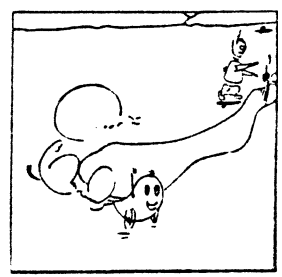
En désignant par  $P_{ij}(q)$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ), les éléments de la matrice  $P^{on}$  exprimés en fonction des coordonnées généralisées, les expressions des composantes du vecteur  $L$  sont d'après (1.7), (1.16) (1.18) et (1.20) données par

$$L(q) \triangleq \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{c} P_{14}(q) + P_{13}(q) \quad 1_E \\ P_{24}(q) + P_{23}(q) \quad 1_E \\ P_{34}(q) + P_{33}(q) \quad 1_E \end{array} \quad (1.21)$$

L'information sur l'orientation de l'organe terminal est contenue dans le bloc  $S^{on}$  de la matrice  $P^{on}$  ; la matrice de passage  $S^{on}$  ou plus simplement  $S$  est formée par les trois colonnes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  regroupant les composantes, dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , des trois vecteurs unitaires du repère  $\mathcal{R}_n$  lié à l'organe terminal :

$$S(q) \triangleq S^{on}(q) \triangleq |e_1(q) \quad e_2(q) \quad e_3(q)| \quad (1.22)$$

Avant d'examiner les différents choix de paramètres d'orientation, i.e. choix du vecteur  $R$ , nous expliciterons les matrices  $L(q)$  et  $S(q)$  dans le cas du robot vertical 80 dont les paramètres géométriques et les différents repères sont portés ou définis (en fixant le sens de la rotation) sur la figure 1.4.



à l'aide des quantités :

$$\begin{aligned} V_1 &= S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & W_1 &= C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 \\ V_2 &= -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & W_2 &= C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6 \\ V_3 &= S_4 S_5 & W_3 &= C_4 S_5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_1 &= C_{23} S_5 S_6 - S_{23} W_1 \\ U_2 &= C_{23} S_5 S_6 + S_{23} W_2 \\ U_3 &= C_{23} C_5 - S_{23} W_3 \end{aligned}$$

où

$$C_{23} = \cos(q_2 + q_3) \text{ et } S_{23} \triangleq \sin(q_2 + q_3)$$

la matrice de passage  $S$  s'écrit :

$$S(q) = \begin{vmatrix} -S_1 U_1 + C_1 V_1 & -S_1 U_2 + C_1 V_2 & -S_1 U_3 + C_1 V_3 \\ C_1 U_1 + S_1 V_1 & C_1 U_2 + S_1 V_2 & C_1 U_3 + S_3 V_3 \\ S_{23} S_5 S_6 + C_{23} W_1 & S_{23} S_5 S_6 - C_{23} W_2 & S_{23} C_5 + C_{23} W_3 \end{vmatrix}$$

Le vecteur  $L(q)$  est, d'après (1.18) et (1.21) donné par :

$$L(q) \triangleq \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -S_2 [C_2 l_2 + C_{23} (l_3 + C_5 l_E)] - S_{23} C_4 S_5 l_E + C_1 S_4 S_5 l_E \\ C_1 [C_2 l_2 + C_{23} (l_3 + C_5 l_E)] - S_{23} C_4 S_5 l_E + S_1 S_4 S_5 l_E \\ l_1 + S_2 l_2 + S_{23} (l_3 + C_5 l_E) + C_{23} C_4 S_5 l_E \end{vmatrix}$$

En remplaçant  $l_E$  par zéro, on obtient les expressions extrêmement simples des composantes du vecteur  $L(q)$  lorsque  $\mathcal{O}_E$  coïncide avec  $\mathcal{O}_6$  :

$$L(q) = \begin{vmatrix} S_1 (C_2 l_2 + C_{23} l_3) \\ C_2 (C_2 l_2 + C_{23} l_3) \\ l_1 + S_2 l_2 + S_{23} l_3 \end{vmatrix}$$

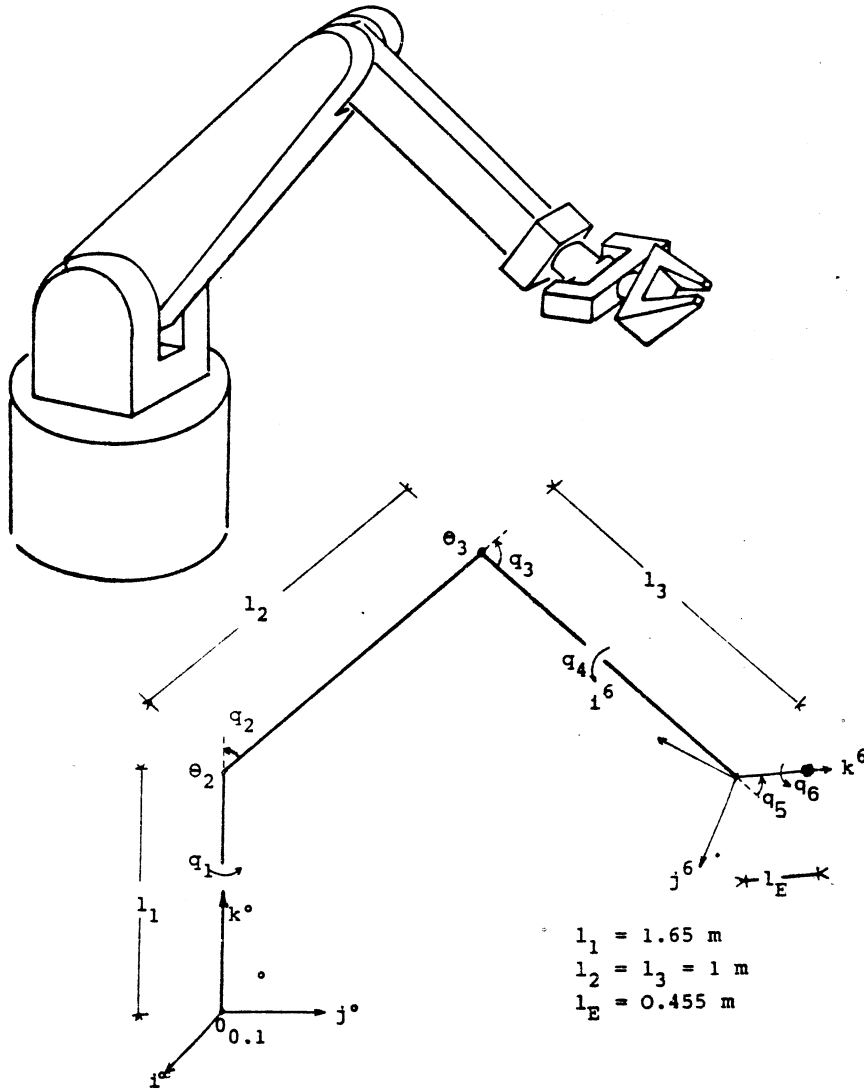
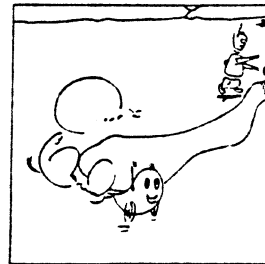


FIGURE 1.4 : Schéma du robot vertical 80





### 1.3.2 - COSINUS DIRECTEURS

La façon la plus simple de représenter l'orientation consiste à utiliser directement les éléments de la matrice  $S$ , composantes dans  $\mathcal{R}_0$  des vecteurs unitaires du repère lié à l'organe terminal. Le vecteur  $R(q)$  est alors immédiat :

$$R(q) = \begin{vmatrix} e_1(q) \\ \text{-----} \\ e_2(q) \\ \text{-----} \\ e_3(q) \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

Notons que l'on peut, compte tenu de l'orthogonalité de  $S$ , n'utiliser que deux vecteurs  $e_i(q)$  et  $e_j(q)$  pour définir l'orientation [PIE68, FOU80], i.e.  $R(q) = |e_i(q) \ e_j(q)|^T$ .

Un modèle géométrique  $G_{CD}$  élaboré à l'aide des coordonnées cartésiennes et des cosinus directeurs est de la forme :

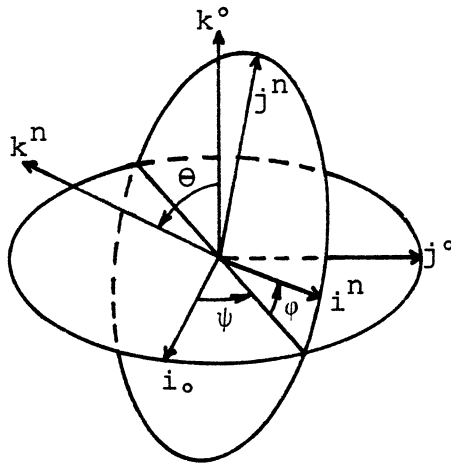
$$X = G_{CD}(q)$$

avec

$$X \triangleq \begin{vmatrix} x & y & z & e_1^T & e_2^T & e_3^T \end{vmatrix}^T \quad (1.24)$$

### 1.3.3 - ANGLES D'EULER

Les grandeurs angulaires sont les seuls paramètres indépendants (un nombre de trois) représentatifs des rotations dans l'espace à trois dimensions. En mécanique, les angles d'Euler sont utilisés pour représenter les rotations de solides mobiles autour d'un point fixe. Et l'on rencontre dans la littérature [MOR73] différentes conventions pour leur définition. Celle que nous avons adoptée correspond à la définition (1.13-14) et que l'on représente sur la figure 1.5.  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  étant respectivement l'angle de précession, l'angle de nutation et l'angle de rotation propre.



**FIGURE 1.5** : Définition des angles d'Euler

Exprimée en fonction des coordonnées généralisées, la matrice  $S$  peut être interprétée comme étant le produit des trois matrices orthogonales  $S_\psi$ ,  $S_\theta$  et  $S_\phi$  représentant les trois rotations successives d'angles d'Euler qui permettent de passer du repère  $\mathcal{R}_0$  au repère  $\mathcal{R}_n$ .

La matrice  $S_E$  produit des trois rotations s'écrit :

$$S_E = S_\psi S_\theta S_\phi \quad (1.25)$$

$S_\psi$ ,  $S_\theta$  et  $S_\phi$  étant définies en (1.14), d'où

$$S_E \triangleq \begin{bmatrix} C_\psi C_\phi - S_\psi C_\theta S_\phi & -C_\psi S_\phi - S_\psi C_\theta C_\phi & S_\psi S_\theta \\ S_\psi C_\phi + C_\psi C_\theta S_\phi & -S_\psi S_\phi + C_\psi C_\theta C_\phi & C_\psi S_\theta \\ S_\theta S_\phi & S_\theta C_\phi & C_\theta \end{bmatrix} \quad (1.25\text{bis})$$

En écrivant l'identité entre les éléments de la matrice  $S_E$  et les éléments  $P_{ij}$  de la matrice  $S$  et en supposant que  $P_{33} \neq \pm 1$  les angles d'Euler s'écrivent [KUL76, ZAB79]

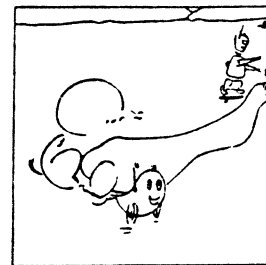
$$\psi = \text{signe}(P_{13}) \arccos \left( -P_{23} / \sqrt{1 - P_{33}^2} \right)$$

$$\text{et} \quad \theta = \arccos(P_{33}) \quad (1.26)$$

$$\phi = \text{signe}(P_{31}) \arccos \left( P_{32} / \sqrt{1 - P_{33}^2} \right)$$

D'où le vecteur

$$R(q) = [\psi \quad \theta \quad \phi]^T$$



qui avec le vecteur  $L(q)$  donné par la relation (1.21) permettent d'écrire le modèle géométrique  $G_E$  :

$$\chi = G_E(q)$$

avec

$$\chi = |x \ y \ z \ \psi \ \theta \ \varphi|^T \quad (1.27)$$

Les paramètres représentatifs  $\chi$  forment un ensemble de coordonnées opérationnelles.

Comme toute représentation angulaire de rotation, celle que nous venons d'étudier pose le problème de la singularité de la représentation pour certaines configurations. Ici, cette singularité se pose lorsque  $P_{33} = \pm 1$  ( $\theta = k\pi$ ,  $k$  entier). Dans ce cas, seule la somme ou la différence des angles  $\psi$  et  $\varphi$  peut être déterminée (la somme lorsque  $P_{33} = 1$  et la différence pour la valeur opposée). Singularité qui se posera d'ailleurs au niveau du modèle cinématique ou variationnel (cf § 1.4.2).

#### I.3.4 - PARAMETRES D'OLINDE RODRIGUES

Les *paramètres d'Olinde Rodrigues* parfois appelés *paramètres d'Euler* [REN80] sont, en fait les quatre composantes du quarternion associées aux rotations de l'espace à trois dimensions.

Les rotations de l'espace à trois dimensions sont définies par le produit de deux symétries planes opérant sur les points de cet espace.

Soient  $U$  et  $V$  les deux vecteurs unitaires définissant les demi-normales de deux plans associés à une rotation d'angle  $\theta$ , et  $W$  le vecteur unitaire porté par la droite résultant de l'intersection de ces deux plans et orientée de telle sorte que le trièdre  $U$ ,  $V$  et  $W$  soit direct (cf figure 1.6). L'angle de rotation étant le double de l'angle des deux plans de symétrie, l'angle des vecteurs unitaires  $U$  et  $V$  est de  $\theta/2$ .

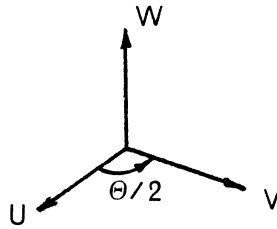


FIGURE 1.6 : Définition des vecteurs  $U$ ,  $V$  et  $W$

Quelle que soit la valeur de l'angle  $\theta/2$  des vecteurs  $U$  et  $V$  nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} U \wedge V &= W \sin \frac{\theta}{2} \\ U \cdot V &= \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.28)$$

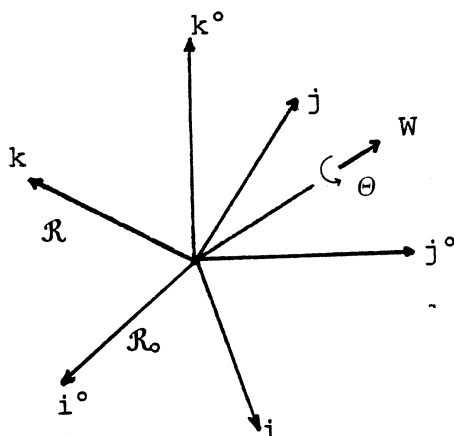
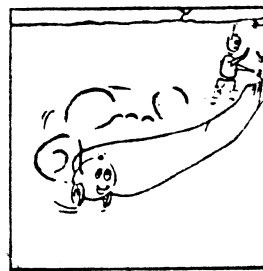
Désignons par  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  les composantes, dans le trièdre direct de référence, du vecteur  $W$ . Toute rotation d'angle  $\theta$  autour du vecteur  $W$  peut être représentée par les quatre paramètres résultant du système (1.28) et que nous noterons :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \\ \lambda_2 &= W_1 \sin \frac{\theta}{2} \\ \lambda_3 &= W_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ \lambda_4 &= W_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Les paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont les paramètres d'Olinde-Rodrigues (P.O.R.) ; ils vérifient la relation :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 1 \quad (1.30)$$

A l'aide des P.O.R. l'orientation d'un repère  $\mathcal{R}$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_0$ , est définie par la rotation  $\theta$  dont il faut faire pivoter le repère  $\mathcal{R}_0$  autour de l'axe passant par l'origine et orienté par  $W$  (cf figure 1.7)



**FIGURE 1.7** : Définition des P.O.R.

En décomposant cette rotation en trois rotations successives, nous retrouvons les trois angles d'Euler. Avec la convention adoptée au § 1.3.3, pour le choix des angles d'Euler, la détermination des P.O.R. en fonction des angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  conduit à l'ensemble des relations [MOR73]

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \\
 \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \\
 \lambda_3 &= \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \\
 \text{et} \quad \lambda_4 &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\psi + \varphi}{2}
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Ces relations permettent notamment de vérifier que la singularité posée par les angles d'Euler est bien levée par l'utilisation des P.O.R. En effet, aux positions singulières, ces paramètres font intervenir soit la somme soit la différence des angles  $\psi$  et  $\varphi$ ; quantités qui restent définies (cf § 1.3.3)

En fonction des P.O.R., le passage du repère  $\mathcal{R}_0$  au repère  $\mathcal{R}_n$  lié à l'organe terminal s'exprime par la matrice [ABA63] :

$$S_{\lambda} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) - 1 & 2(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_4^2) - 1 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Si la détermination des valeurs absolues des P.O.R. en fonction de coordonnées généralisées se fait aisément par l'identification des matrices  $S_\lambda$  et  $S$ . L'obtention de leur signe n'est, cependant pas immédiate.

D'autre part, étant au nombre de 4, les P.O.R. ne sauraient former avec les coordonnées cartésiennes de position un ensemble de coordonnées opérationnelles.

En émettant l'hypothèse de la possibilité de choisir l'angle de rotation  $\theta$  autour du vecteur unitaire  $W$  à l'intérieur de l'intervalle  $|0, \pi|$  M.RENAUD [REN80A] a montré que la donnée de trois paramètres indépendants  $\lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  permet de définir les rotations dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , du repère  $\mathcal{R}_n$ . Cette hypothèse se traduisant par :

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (1.33)$$

les P.O.R. s'expriment très simplement en fonction des coordonnées généralisées ils s'écrivent [REN80T]:

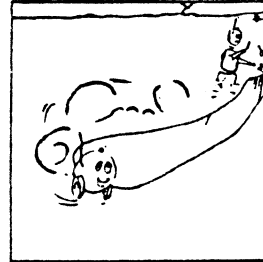
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{P_{11} + P_{22} + P_{33} + 1} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \text{signe } (P_{32} - P_{23}) \sqrt{P_{11} - P_{22} - P_{33} + 1} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \text{signe } (P_{13} - P_{31}) \sqrt{-P_{11} + P_{22} - P_{33} + 1} \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \text{signe } (P_{21} - P_{12}) \sqrt{-P_{11} - P_{22} + P_{33} + 1} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Le vecteur  $R$  des paramètres d'orientation est

$$R = [\lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4] \quad (1.35)$$

il forme, avec le vecteur  $L(q)$  des coordonnées cartésiennes, un système de coordonnées opérationnelles et le modèle géométrique  $G_R$  associé s'écrit :

$$\chi = G_R(q) \quad (1.36)$$



avec

$$\chi = [x \ y \ z \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^T \quad (1.36)$$

Si l'hypothèse (1.33) ne peut, comme l'illustre l'exemple de la figure 1.8, être satisfaite qu'en retréignant le domaine atteignable de l'espace de configuration du système ; l'étude qu'a menée M.RENAUD [REN80A et T] a permis de mettre en évidence l'apport appréciable des P.O.R. tant au niveau de la représentation qu'au niveau de la commande. Cette étude est à l'origine des développements qui font l'objet du § 1.6.

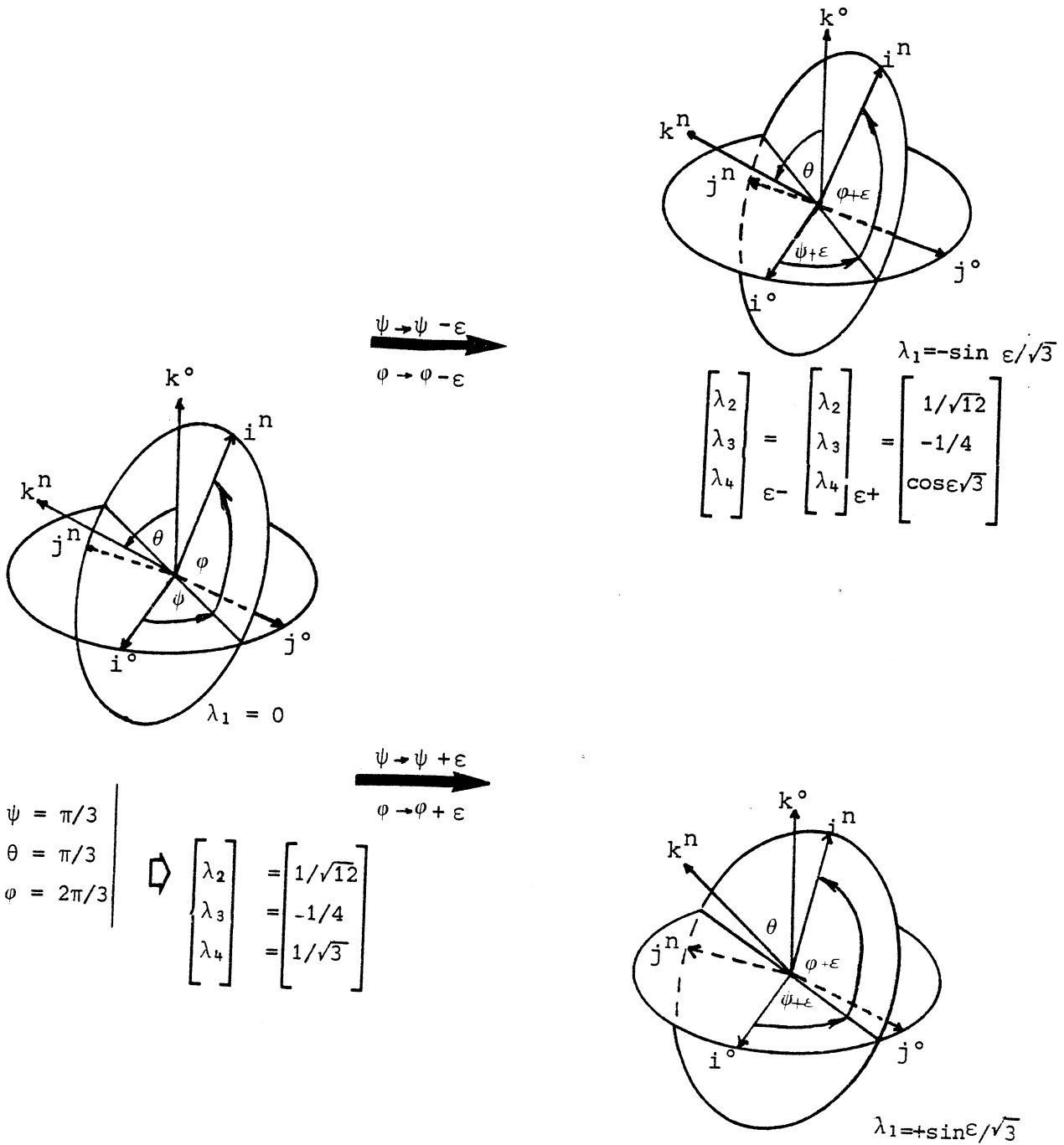
### I.3.5 - MODELE GEOMETRIQUE INVERSE

Elaborée dans l'espace des coordonnées généralisées, la commande de robots-manipulateurs nécessite en premier lieu la conversion des évolutions de la tâche en évolutions définies dans cet espace.

Une première approche de ce problème est celle qui consiste à rechercher, si elles existent, les inverses du modèle géométrique du système. L'existence de solutions est liée à la *solubilité* du mécanisme articulé, notion introduite par D.L.PIEPER et B.ROTH [PIE68, PIE69] exprimant la possibilité de déterminer les différents ensembles de valeurs des coordonnées généralisées associés à toutes les configurations pouvant être occupées par le système, pour toute position et toute orientation de l'organe terminal [ROT 73].

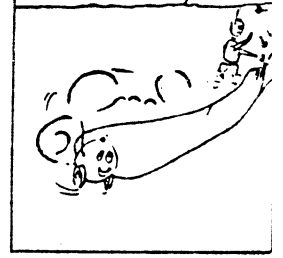
La non linéarité du modèle géométrique rend extrêmement complexe la recherche d'une inverse. C'est uniquement pour des structures particulières de mécanismes articulés que des solutions analytiques ont été trouvées.

Si cette approche peut, dans le cas de certains manipulateurs programmés, être utilisée pour l'enregistrement, hors ligne de trajectoires [VER78], elle est de par sa lourdeur mal adaptée à son intégration dans un système de commande de robot manipulateur.



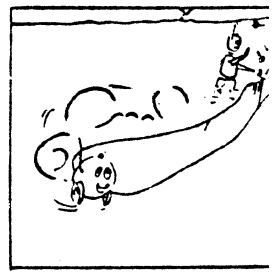
**FIGURE 1.8** : EXEMPLE DE DEUX EVOLUTIONS DIFFERENTES AYANT LA MEME REPRESENTATION  $\lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$





Proposée par D.E.WHITNEY [WHI72] la seconde approche du problème de la conversion consiste à utiliser l'inverse du modèle cinématique, approche qui sera développée dans le paragraphe ci-après.





## I.4 - MODELE VARIATIONNEL (CINÉMATIQUE)

Au centre de ce paragraphe se trouve l'une des principales composantes de tout système de commande de robot manipulateur, à savoir la *matrice jacobienne*. On la rencontre aussi bien dans les représentations variationnelles des tâches à évolution imposée que dans les descriptions faisant intervenir les vitesses, voire les accélérations des paramètres de configuration. On la retrouve encore dans l'établissement de la relation fondamentale liant les efforts exercés sur l'organe terminal aux forces généralisées comme nous le verrons par la suite.

Selon la définition utilisée, deux types de matrices jacobien-  
nes peuvent être distinguées :

i) Matrice associée à un modèle géométrique d'éléments :

$$J_{ij}(q) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} G_i(q) \quad (1.37)$$

ii) Matrice associée à une représentation cinématique de la tâche et de l'effecteur utilisant les paramètres homogènes à des vitesses

$$\dot{\chi} = J(q) \dot{q} \quad (1.38)$$

ou à des représentations variationnelles :

$$\delta\chi = J(q) \delta q \quad (1.39)$$

Alors que la matrice  $J(q)$  définie par (1.37) vérifie les relations (1.38) et (1.39), la jacobienne de (1.38) ou de (1.39) est associée à une représentation ne dérivant pas, forcément de paramètres de configuration. C'est notamment le cas de la matrice jacobienne associée à la représentation en vitesse proposée par D.E. WHITNEY [WHIT72].

La relation (1.38) définit le *modèle cinématique* et la relation (1.39) est appelée [REN80T] *modèle variationnel*. Ces modèles, comme le modèle géométrique (cf 1.3), se rattachent à des représentations de l'effecteur ou de la tâche. La distinction se fait, comme précédemment, à l'aide de l'indice

( $\kappa$ ). Une matrice jacobienne du système étant définie, la jacobienne associée à une tâche  $\kappa$  peut en être déduite en utilisant (cf § 1.2) la matrice de la tâche  $\varepsilon_{\kappa}$  [FOU80]:

$$J_{\kappa}(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\kappa} J(\mathbf{q}) \quad (1.40)$$

Nous allons examiner, successivement, les différentes matrices jacobienes obtenues à partir des différents choix de paramètres. Nous verrons que toutes ces matrices s'obtiennent à partir d'une matrice jacobienne associée à un modèle cinématique ou variationnel de base que nous commençons par étudier.

#### 1.4.1 - MODELE CINEMATIQUE DE BASE

Il s'agit d'un modèle cinématique proposé par D.E.WHITNEY [WHI72] pour effectuer la commande en vitesse de robots manipulateurs. Le mouvement de l'organe terminal est décrit par deux vecteurs  $V$  et  $\omega$  (cf figure 1.9) mesurant ses vitesses de déplacement et de rotation.

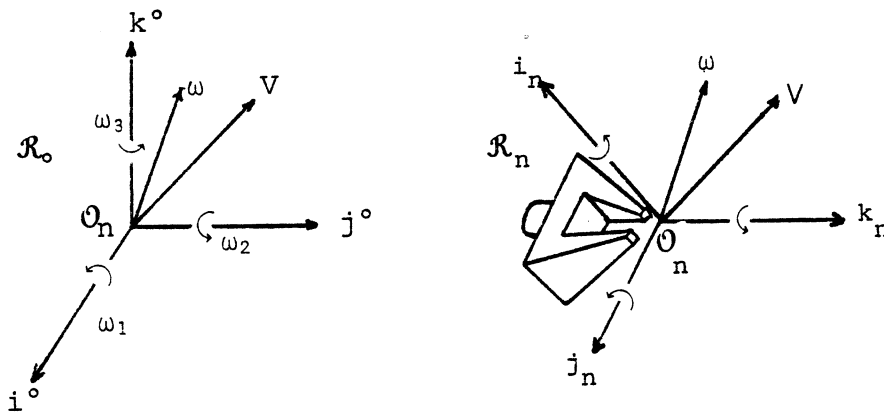
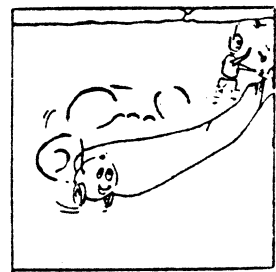


FIGURE 1.9 : Définition des vecteurs  $V$  et  $\omega$

Le système de 6 équations exprimant les composantes dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ , des vecteurs  $V$  et  $\omega$  en fonction des vitesses généralisées est le modèle cinématique de base :



$$\dot{\chi}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = J_0(q) \dot{q} \quad (1.41)$$

et  $J_0(q)$  sera dite *matrice jacobienne de base*. Notons que l'on retrouve cette même matrice  $J_0(q)$  à partir d'une représentation variationnelle [REN80]

En utilisant les définitions et les notations développées au § 1.3.1, les composantes dans  $\mathcal{R}_0$  des vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\omega$  s'écrivent :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n-1} s^{0i} (\bar{\rho}_i z^i \times L^{in} + \rho_i z^i) \dot{q}_i \quad (1.42)$$

et

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-1} s^{0i} z^i \dot{q}_i$$

Désignons par  $\hat{z}^i$  la matrice antisymétrique de l'opérateur produit vectoriel par le vecteur unitaire  $z^i$ . L'indice (i) sera omis lorsque ce produit est effectué dans le repère  $\mathcal{R}_i$ . La matrice  $\hat{z}$  s'écrit :

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Les relations (1.41-43) permettent donc d'obtenir :

$$J_0(q) = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} s^{01} (\bar{\rho}_1 \hat{z} L^{1n} + \rho_1 z^1) & s^{02} (\bar{\rho}_2 \hat{z} L^{2n} + \rho_2 z^2) & \dots & s^{0n} \hat{z} L^{nn} \\ \hline s^{01} z^1 & s^{02} z^2 & \dots & s^{0n} z^n \end{array} \right] \quad (1.44)$$

La matrice jacobienne de base  $J_0(q)$  de dimensions  $6 \times n$  caractérise, indépendamment de la représentation de l'organe terminal adoptée, la mobilité de l'effecteur pour toute configuration du système.

(\*)

Ces composantes sont exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_n$  pour le modèle cinématique proposé par D.E.WHITNEY.

En effet, au mouvement du système, on peut associer le mouvement du point  $q$  figuratif de l'une de ses configurations ;  $q$  décrit une courbe dans un domaine de l'espace à  $n$  dimensions quand le temps varie. Une position à partir de laquelle le point  $q$  ne peut évoluer suivant une direction quelconque de son domaine est une position singulière, correspondant à une *configuration singulière* du système. Le mouvement de l'effecteur lorsque le système occupe une telle configuration, se fait de telle sorte que les composantes de ses vitesses  $V$  et  $\omega$  au point singulier vérifient certaines relations ou contraintes associées à cette singularité. La mobilité de l'effecteur, dans une configuration singulière, diminue. Elle décroît d'autant plus que le nombre de relations indépendantes entre les composantes de  $V$  et  $\omega$  est élevé. L'examen du système (1.41) permet alors d'établir: *la mobilité de l'effecteur dans une configuration  $q$ , est égale au rang de la matrice  $J_o(q)$  [FOU80].*

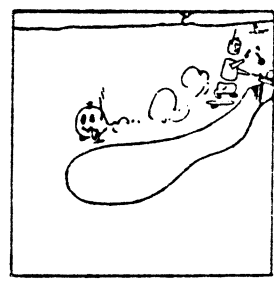
En dehors des positions singulières, la mobilité est donnée par le nombre  $m_o$  de degrés de liberté de l'effecteur.

Une décomposition de la matrice  $J_o(q)$  en produit de matrices de formes simples a été réalisée par M.RENAUD [REN79B]. Cette décomposition permet, dans le cas des systèmes non redondants, d'obtenir très simplement l'expression analytique de son déterminant, ce qui fournit un moyen intéressant pour déterminer les configurations singulières. Nous verrons au §1.5 l'apport de cette décomposition quant aux problèmes de l'inversion du modèle cinématique.

La matrice jacobienne de base  $J_o(q)$  du robot vertical 80 est donnée en Annexe A.1.

#### I.4.2 - MODELE CINEMATIQUE ASSOCIE A $G_E$

La matrice jacobienne  $J_E$  associée au modèle géométrique utilisant les angles d'Euler (cf § 1.3.3) s'obtient, aisément, à partir de la matrice  $J_o$ . En effet, il suffit, pour ce faire, d'exprimer les dérivées par rapport au temps des coordonnées opérationnelles  $\kappa$  en fonction des vitesses  $V$  et  $\omega$ . Les vitesses de rotations  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  mesurées dans le repère fixe sont



liées aux dérivées temporelles des angles d'Euler par une relation qui, avec la convention du § 1.3.3., s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & C \psi & S \psi S \theta \\ 0 & S \psi & -C \psi S \theta \\ 1 & 0 & C \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix} \quad (1.45)$$

La relation inverse exprimant  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  en fonction des vitesses de rotation présente, comme nous l'avons énoncé au § 1.3.3, la même singularité que le modèle géométrique lorsque  $\theta = k\pi$  ( $k$  entier). Pour  $\theta \neq k\pi$ , la relation inverse est donnée par :

$$\begin{vmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix} = \Phi(q) \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

avec

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} -S \psi \operatorname{Ctg} \theta & C \psi \operatorname{Ctg} \theta & 1 \\ C \psi & S \psi & 0 \\ \frac{S \psi}{S \theta} & -\frac{C \psi}{S \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta \neq k\pi) \quad (1.47)$$

D'après les définitions du modèle cinématique de base  $J_0$ (1.41) et du modèle géométrique  $G_E$ (1.27), la matrice  $J_E$  s'obtient en introduisant la matrice :

$$\Omega_E(q) \triangleq \begin{vmatrix} \Pi_3 & \mathcal{O}_3 \\ \mathcal{O}_3 & \Phi(q) \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

dans laquelle  $\Pi_3$  et  $\mathcal{O}_3$  désignent respectivement la matrice unité et la matrice à éléments nuls toutes deux d'ordre 3. A l'aide de  $\Omega_E$ , la matrice jacobienne  $J_E$  de dimensions  $6 \times n$  s'écrit :

$$J_E(q) = \Omega_E(q) J_o(q) \quad ; \quad (\theta \neq k \pi) \quad (1.49)$$

D'où le modèle cinématique associé à  $G_E$  et défini pour les configurations du système telles que  $\theta \neq k \pi$

$$\dot{\chi} = \Omega_E(q) J_o(q) \dot{q}; \quad (\theta \neq k \pi) \quad (1.50)$$

### 1.4.3 - MODELE CINEMATIQUE ASSOCIE A $G_R$

Désignons par  $\lambda$ , le vecteur dont les composantes sont les paramètres d'Olinde Rodrigues soit :

$$\lambda = |\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4|^T \quad (1.51)$$

L'évolution de  $\lambda$  est régie par l'équation différentielle [ABA63]

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \overset{\vee}{\lambda} \omega \quad (1.52)$$

où  $(\overset{\vee}{\cdot})$  est l'opération qui à  $\lambda$  fait correspondre la matrice  $4 \times 4$  :

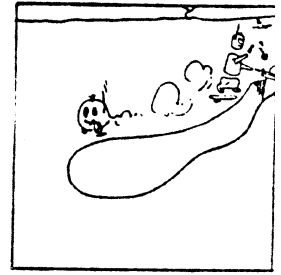
$$\overset{\vee}{\lambda} = \begin{vmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_4 & -\lambda_3 \\ -\lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix} \quad (1.53)$$

et où  $\omega$  est le vecteur de la vitesse de rotation du repère mobile mesurée dans le repère fixe.

Avec l'hypothèse (1.33), la matrice jacobienne  $J_R(q)$  de dimension  $6 \times n$  associée au modèle géométrique  $G_R$  (1.36) est, à l'aide de  $J_o$ , donnée par :

$$J_R(q) = \Omega_R(q) J_o(q)$$





avec

$$\Omega_R(q) = \begin{vmatrix} \Pi_3 & 0_3 \\ 0_3 & \frac{1}{2} \bar{\lambda}(q) \end{vmatrix}$$

où

$$\bar{\lambda}(q) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 & -\lambda_3 \\ -\lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}$$

(1.54)

Dans ces conditions, le modèle cinématique associé à  $G_R$  s'écrit :

$$\dot{\chi} = \Omega_R(q) J_o(q) \dot{q} \quad q \in \{q: \lambda_1(q) \geq 0\} \quad (1.55)$$

Les limites, déjà signalées, de cette représentation et les solutions que nous avons développées pour y remédier sont présentées au § 1.6.

#### 1.4.4 - MODELE CINEMATIQUE ASSOCIE A $G_{DC}$

Les cosinus directeurs étant explicitement exprimés en fonction des coordonnées généralisées (cf. rel.1.24), la matrice  $J_{CD}(q)$  associée au modèle géométrique  $G_{CD}(q)$  s'obtient aisément en utilisant la définition (1.37) de la matrice jacobienne.

De dimensions élevées (12xn), la matrice  $J_{CD}(q)$  obtenue par ce procédé se présente sous une forme qui se prête difficilement à toute analyse. En l'absence d'une connaissance de ses propriétés, seules des techniques numériques qui s'avèrent relativement complexes peuvent être utilisées lors du traitement du problème de l'inverse.

Le développement de cette matrice, en faisant apparaître la matrice jacobienne de base  $J_o(q)$  permet très simplement, comme nous le montrons au § 1.5, de mettre en évidence les propriétés de la représentation à laquelle elle est associée, propriétés dont l'utilisation réduira sensiblement la complexité du système à résoudre.

Nous recherchons la matrice  $J_{CD}(q)$  à partir de la définition (1.38) de la matrice jacobienne en utilisant un résultat classique de la mécanique relatif aux dérivées temporelles de vecteurs liés à un solide.

Les expressions vectorielles des dérivées par rapport au temps des trois vecteurs unitaires  $i^n$ ,  $j^n$  et  $k^n$  du repère  $\mathcal{R}_n$ , supposé être animé du seul mouvement de rotation défini par le vecteur  $\omega$ , sont données par [VER64]

$$\begin{aligned}\frac{di^n}{dt} &= \omega \wedge i^n \\ \frac{dj^n}{dt} &= \omega \wedge j^n\end{aligned}\quad (1.56)$$

et

$$\frac{dk^n}{dt} = \omega \wedge k^n$$

En utilisant l'opérateur produit vectoriel qui au vecteur  $V = |V_1 \ V_2 \ V_3|^T$  fait correspondre la matrice  $\hat{V}$  :

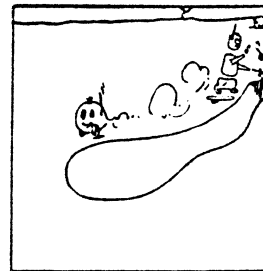
$$\hat{V} = \begin{vmatrix} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{vmatrix}\quad (1.57)$$

l'on peut aisément vérifier qu'à l'aide des trois vecteurs colonnes  $e_1, e_2$  et  $e_3$  de la matrice de passage  $S$  (cf. rel. 1.22), le système (1.56) est représenté, suivant que  $\omega$  est observé dans  $\mathcal{R}_0$  ou dans  $\mathcal{R}_n$  par l'une des deux équations matricielles suivantes :

i)  $\omega$  mesuré dans  $\mathcal{R}_0$

$$\begin{vmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{vmatrix} = E(q) \omega^{(0)}\quad (1.58)$$

où  $E$  est la matrice  $9 \times 3$  :



$$E = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

ii)  $\omega$  mesuré dans  $\mathcal{R}_n$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = E^* \omega^{(n)} \quad (1.60)$$

où  $E^*$  est la matrice  $9 \times 3$  :

$$E^* = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Le vecteur  $R(q)$  associé à la représentation utilisant les cosinus directeurs étant défini (cf rel. 1.23) par

$$R(q) = [e_1^T \quad e_2^T \quad e_3^T]^T$$

L'introduction de la matrice  $\Omega_{CD}$  de dimensions  $12 \times 6$  :

$$\Omega_{CD}(q) = \begin{bmatrix} \Pi_3 & 0_3 \\ 0_{6,3} & E(q) \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

et l'utilisation des définitions (1.23) et (1.41) permettent de mettre la matrice jacobienne  $J_{CD}$  ( $12 \times 6$ ) associée au modèle géométrique (1.23) sous la forme :

$$J_{CD}(q) = \Omega_{CD}(q) J_o(q) \quad (1.63)$$

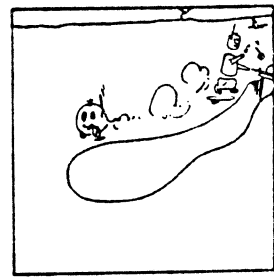
Dans ces conditions le modèle cinématique associé à  $G_{CD}(q)$  s'écrit :

$$\dot{\bar{X}} = \Omega_{CD}(q) J_o(q) \dot{q}$$

Dans le cas où les vitesses de rotation du modèle cinématique de base (1.41) sont mesurées dans le repère mobile  $\mathcal{R}_n$ , la matrice  $\Omega_{CD}(q)$  définie par (1.62) fera intervenir la matrice  $E^*$  (1.61) à la place de  $E$ . Et l'on peut d'ailleurs aisément vérifier la relation :

$$E^* = E S \tag{1.64}$$

Notons que dans certaines représentations, seules deux colonnes de la matrice  $S$  sont considérées, par exemple, on trouve  $e_1$  et  $e_2$  dans [PIE68, FOU80]. La matrice jacobienne dans ce cas est de dimension  $9 \times 6$ . Sa décomposition sous la forme (1.63) s'obtient en supprimant les trois lignes de  $\Omega_{CD}$  correspondantes à la colonne non utilisée de  $S$ .



## I.5 - MODELE VARIATIONNEL INVERSE

Les difficultés posées par la recherche de l'inverse du modèle géométrique ont conduit, comme nous l'avons dit, à l'utilisation de l'approche variationnelle. Toutefois, et malgré sa linéarisation du problème de l'inverse, le modèle variationnel reste un système complexe dont l'obtention et la résolution mettent en jeu un volume fort important de calculs.

Il importe, d'autre part, de signaler que les informations sur la tâche fournie par l'inverse de ce modèle deviennent insuffisantes lorsque de plus hautes performances sont exigées. Nous verrons, en effet, qu'un modèle de plus grande complexité, faisant intervenir la dérivée par rapport au temps de la matrice jacobienne est alors à utiliser [KHA78A, PAU79, REN79A, LUH80].

Soit  $\delta\chi_{\kappa}$  la matrice  $m_{\kappa} \times 1$  des accroissements imposés ou des écarts observés entre les valeurs désirées et les valeurs réelles des paramètres de configuration d'une tâche  $\kappa$  à un instant donné. Le problème posé consiste à résoudre le système :

$$J_{\kappa}(q) \delta q = \delta\chi_{\kappa} \quad (1.65)$$

La matrice  $J_{\kappa}(q)$  s'obtient à partir de la matrice jacobienne  $J(q)$  associée à la représentation adoptée de l'effecteur en utilisant la matrice de la tâche  $\epsilon_{\kappa}$ .

Une étude très développée de ce problème a été menée par A.FOURNIER [FOU80]. La méthode de résolution proposée nous semble particulièrement adaptée aux problèmes où la tâche est décrite par un sous-ensemble des paramètres de configuration de l'effecteur i.e.  $m_{\kappa} < m$

Par contre, lorsque la position et l'orientation de l'organe terminal sont complètement spécifiées par la tâche i.e.  $m_K = m$ , le problème peut être notablement simplifié. Nous verrons, en effet, que la résolution du problème dans ce cas, met en jeu la détermination de la pseudo inverse d'une matrice beaucoup plus simple que la matrice jacobienne. Signalons, quant à la recherche de la pseudo inverse, l'algorithme performant de calcul itératif présenté en [FOU80].

Le système à résoudre s'écrit :

$$J(q) \delta q = \delta \chi \quad (1.66)$$

$J(q)$ ,  $\delta q$  et  $\delta \chi$  sont respectivement de dimensions  $m \times n$ ,  $n \times 1$  et  $m \times 1$ . Le nombre  $m$  dépend de la représentation adoptée et l'on a dans le cas des systèmes considérés les relations :

$$r = \text{rang } |J(q)| \leq m_0 = 6 \leq n \quad (1.67)$$

et  $m \geq m_0$

Le système (1.66) possède une solution si le rang de la matrice augmentée  $|J(q) \mid \delta \chi|$  est égal au rang de la matrice  $J(q)$  [NOB77]. Cette condition traduit la compatibilité entre la tâche imposée et la mobilité de l'organe terminal. Dans le cas des systèmes et des tâches considérés l'existence d'une solution est assurée lorsque le rang de la matrice  $J(q)$  est égal à 6; l'unicité de cette solution est liée au nombre des inconnues. Lorsque ce nombre est supérieur à 6, i.e. le système est redondant, une infinité de solutions peut être trouvée. La solution unique correspond au cas des systèmes non redondants i.e.  $n=6$ .

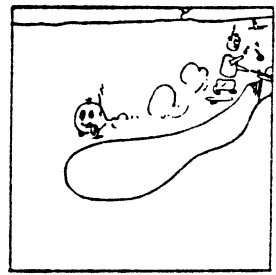
La résolution d'un système tel que (1.66) fait appel à la notion de pseudo-inverse dont nous rappelons brièvement dans le cas des matrices réelles, la définition et les propriétés [FRA64, SON80]

#### Définition - Théorème 1.5

Soit  $A$  une matrice réelle de dimension  $m \times n$ . La matrice  $n \times m$   $B$  est dite la *pseudo-inverse*<sup>(\*)</sup> si et seulement si l'ensemble des relations suivantes sont vérifiées :

---

(\*) The (Moore Penrose) generalized inverse



$$\begin{aligned}
 A B A &= A & B A B &= B \\
 (A B)^T &= A B & \text{et} & (B A)^T = B A
 \end{aligned}
 \tag{1.68}$$

De plus, la matrice  $B$ , notée  $A^+$ , est unique.

La solution générale du système (1.66) est donnée par [FOU80] :

$$\delta q = J^+(q) \delta \chi + |J^+(q) J(q) - \Pi_n| \eta
 \tag{1.69}$$

$\eta$  est un vecteur arbitraire qui peut être choisi comme le gradient d'un critère à optimiser [LIE77, FOU80]. Notons que la solution  $J^+(q) \delta \chi$  fournit  $\delta q$  qui minimise au sens des moindres carrés la norme euclidienne  $||J(q) \delta q - \delta \chi||$ . Cette solution est particulièrement intéressante lors d'une incompatibilité due à une diminution de la mobilité de l'effecteur i.e.  $r < 6$ . En effet, si dans ce cas, le système (1.66) n'est pas résolvable, la solution précédente mène à une configuration du système se trouvant à une distance minimale de la tâche.

### 1.5.1 - REDUCTION AU SYSTEME DE BASE

La matrice jacobienne  $J(q)$  de dimensions  $m \times n$  admet, quelle que soit la représentation à laquelle elle est associée, une décomposition de la forme :

$$J(q) = \Omega(q) J_0(q)
 \tag{1.70}$$

$\Omega(q)$  est la matrice associée à la représentation adoptée, elle est de dimension  $(m \times 6)$  où  $m$  i.e. nombre des paramètres de configuration, est supérieur ou égal à 6.  $J_0(q)$  est la matrice jacobienne de base de dimensions  $(6 \times n)$ .

Examinons, successivement, les matrices  $\Omega(q)$  présentées au § 1.4 :

i) Matrice  $\Omega_E(q)$  associée aux angles d'Euler

La matrice  $\Omega_E(q)$  de dimension  $6 \times 6$  est définie en dehors des singularités de la représentation utilisant les angles d'Euler (cf rel. 1.48). Dans son domaine de définition, elle est de rang 6 et son inverse est, d'après

(1.45) donnée par :

$$\Omega_E^{-1}(q) = \left[ \begin{array}{c|c} \Pi_3 & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & \Phi^{-1}(q) \end{array} \right] \quad (1.71)$$

$$\Phi^{-1}(q) = \begin{bmatrix} 0 & c \psi & s \psi & s \theta \\ 0 & s \psi & -c \psi & s \theta \\ 1 & 0 & 0 & c \theta \end{bmatrix}$$

ii) Matrice  $\Omega_R(q)$  associée au P.O.R.

La matrice  $\Omega_R(q)$  de dimensions  $6 \times 6$  est définie par la relation (1.54). Son inverse lorsque  $\lambda_1 \neq 0$  est donnée par [REN80T]

$$\Omega_R^{-1}(q) = \left[ \begin{array}{c|c} \Pi_3 & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & \lambda^{-1} \mathcal{V}^{-1}(q) \end{array} \right] \quad (1.72)$$

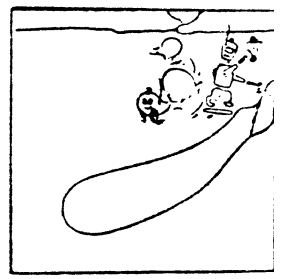
$$\lambda^{-1} \mathcal{V}^{-1}(q) = \frac{1}{\lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 & \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \\ \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_3 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_2 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_3 & \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_4^2 \end{bmatrix}$$

iii) Matrice  $\Omega_{CD}$  associée aux cosinus directeurs

La matrice  $\Omega_{CD}(q)$  définie par la relation (1.62) est rectangulaire, elle est de dimension  $12 \times 6$ . Nous cherchons à déterminer, si elle existe, une inverse de  $\Omega_{CD}(q)$ . L'existence d'une telle inverse est assurée si elle est de rang 6 ou encore si la matrice  $9 \times 3$   $E(q)$  donnée par (1.59) est de rang 3. Or, on peut, en vertu de la propriété (1.64) vérifier que :

$$\text{rang } E = \text{rang } E^* = 3$$





Une inverse à gauche  $\Omega_{CD}^{\dagger}(q)$  de la matrice  $\Omega_{CD}(q)$  est la matrice  $(\Omega_{CD}^T(q) \Omega_{CD}(q))^{-1} \Omega_{CD}^T(q)$ . En remarquant que E et  $E^*$  possèdent la propriété:

$$E^T E = E^{*T} E^* = 2 \Pi_3 \quad (1.73)$$

L'inverse à gauche  $\Omega_{CD}^{\dagger}(q)$  s'écrit :

$$\Omega_{CD}^{\dagger}(q) = \left[ \begin{array}{c|c} \Pi_3 & \mathbf{0}_{3,9} \\ \hline \mathbf{0}_3 & E^{\dagger} \end{array} \right]$$

où  $E^{\dagger}$  est l'inverse à gauche de E donnée, tout simplement par :

$$E^{\dagger} = \frac{1}{2} E^T \quad (1.75)$$

Nous avons signalé que certaines représentations ne font intervenir, pour définir l'orientation, que deux colonnes  $e_k$  et  $e_l$  ( $k, l = 1, 2, 3$  et  $l \neq k$ ) de la matrice de passage [PIE68, FOU80]. L'inverse à gauche  $E_{kl}^{\dagger}$  de la matrice  $E_{kl}$  associée à cette représentation ne s'obtient plus aussi simplement que  $E^{\dagger}$ . En effet, la matrice  $E_{kl}$  de dimension  $6 \times 3$  s'écrit :

$$E_{kl} = \begin{bmatrix} -\hat{e}_k \\ \hline -\hat{e}_l \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

et l'on vérifie que la matrice symétrique  $E_{kl}^T E_{kl}$  n'est plus proportionnelle à la matrice unité.

Lorsque l'on a à faire à une telle représentation, il est plus judicieux d'exprimer la vitesse de rotation  $\omega$  dans le repère mobile. L'inverse à gauche  $E_{kl}^{\dagger}$  est alors remplacée par  $E_{kl}^{*\dagger}$  de forme plus simple.

Considérons, pour illustrer cette proposition, la représentation effectuée à l'aide de  $e_1$  et  $e_3$ . D'après (1.60), la matrice  $E_{13}^*$  est donnée par :

$$E_{13}^* = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbb{0} & -e_3 & e_2 \\ \hline -e_2 & e_1 & \mathbb{0} \end{array} \right] \quad (1.77)$$

L'inverse à gauche  $E_{13}^{*+}$  est immédiate

$$E_{13}^{*+} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{0} & e_2^T \\ \hline -\frac{1}{2} e_3^T & -\frac{1}{2} e_1^T \\ \hline e_2^T & \mathbb{0} \end{array} \right] \quad (1.78)$$

La comparaison de  $E_{13}^{*+}$  à l'inverse à gauche  $E_{13}^+$  donnée, d'après (1.64) par :

$$E_{13}^+ = S E_{13}^{*+} \quad (1.79)$$

soit

$$E_{13}^+ = \left[ -\frac{1}{2} e_2 e_3^T + e_3 e_2^T \mid -e_1 e_2^T + \frac{1}{2} e_2 e_1^T \right];$$

montre la réduction importante de calcul que confère l'utilisation de  $E_{13}^{*+}$

Les différentes matrices  $\Omega$  que nous venons d'examiner sont de rang 6 et possèdent des inverses (à gauche)  $\Omega^+$  sous formes analytiques simples. Une réduction du système (1.66) au système de base, représenté par :

$$J_0(q) \delta q = \delta \chi_0 \quad (1.80)$$

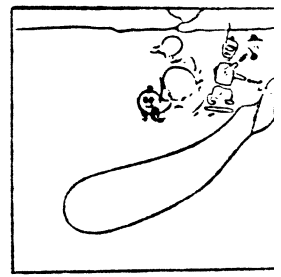
avec

$$\delta \chi_0 = \Omega^+(q) \delta \chi$$

peut alors être réalisée et la solution générale du système (1.66) devient :

$$\delta q = J_0^+(q) \delta \chi_0 + [J_0^+(q) J_0(q) - \Pi_n] \eta \quad (1.81)$$

Cette solution met en jeu la recherche de la pseudo inverse d'une matrice  $6 \times n$ .



La réduction au système de base permet en outre d'envisager l'utilisation de certaines méthodes d'inversion qui requièrent l'indépendance des équations du système (1.66) et qui ne peuvent donc être appliquées aux systèmes utilisant des représentations redondantes i.e.  $m > m_0$ . Signalons, notamment la méthode proposée par D.E.WHITNEY [WHI69] et qui consiste à chercher la solution  $\delta q$  qui minimise un critère quadratique de la forme  $\delta q^T A \delta q$  où  $A$  est une matrice définie positive.  $\delta q$  s'écrit :

$$\delta q = A^{-1} J_0^T(q) | J_0(q) A^{-1} J_0^T(q) | \delta \chi_0 \quad (1.82)$$

Cette méthode, utilisée dans [MOE73, KOZ76] permet, si l'on choisit pour  $A$  la matrice d'énergie cinétique du système d'obtenir les déplacements élémentaires  $\delta q$  qui minimisent cette énergie [REN75]

### I.5.2 - REDUCTION AU SYSTEME REFERENTIEL

Une importante étude de la matrice jacobienne, menée par M.RENAUD [REN79B et 80T] a permis de mettre en évidence un repère préférentiel  $\mathcal{R}_P$  (  $P$  partie entière de  $n/2$  ) pour effectuer son calcul. Exprimée dans le repère  $\mathcal{R}_P$ , la matrice jacobienne admet une décomposition intéressante sous forme du produit de deux matrices. L'utilisation de la matrice de passage  $S^{OP}$  permet alors de l'exprimer dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .

La matrice jacobienne de base  $J_0(q)$  s'écrit :

$$J_0(q) = M(q) N(q) \overset{y}{J}_P(q) \quad (1.83)$$

où  $M(q)$  et  $N(q)$  sont deux matrices carrées régulières d'ordre 6 définies avec les notations du § 1.3.1. par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} S^{OP} & | & 0_3 \\ \hline & & \\ 0_3 & | & S^{OP} \end{bmatrix} \quad N(q) = \begin{bmatrix} \Pi_3 & | & -V \\ \hline & & \\ 0_3 & | & \Pi_3 \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

avec

$$V = \prod_{i=p+1}^n S_{ip}^T \hat{L}_{i+1} S_{ip}$$

et où  $\tilde{J}_p(q)$  est une matrice  $6 \times n$  ayant la même structure et possédant le même rang que la matrice  $J_o(q)$ .

Les matrices inverses  $M^{-1}(q)$  et  $N^{-1}(q)$  s'obtiennent immédiatement :

$$M^{-1}(q) = \begin{bmatrix} S_{OP}^T & | & 0_3 \\ \hline & & \\ 0_3 & | & S_{OP} \end{bmatrix} \quad N^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \Pi_3 & | & V \\ \hline & & \\ 0 & | & \Pi_3 \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

La décomposition (1.83) permet de réduire le système (1.80) au système :

$$\tilde{J}_p(q) \delta q = \delta \chi_p \quad (1.86)$$

avec

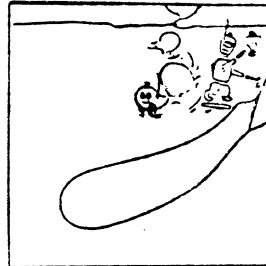
$$\delta \chi_p = N^{-1}(q) M^{-1}(q) \delta \chi_o$$

et la solution générale du système (1.66) s'écrit :

$$\delta q = \tilde{J}_p^+(q) \delta \chi_p + |\tilde{J}_p^+(q) \tilde{J}_p(q) - \Pi_n| \eta \quad (1.87)$$

avec

$$\delta \chi_p = N^{-1}(q) M^{-1}(q) \Omega^+(q) \delta \chi$$



La simplicité de la forme de la matrice  $J_p(q)$  en comparaison avec la matrice  $J_o(q)$  (cf annexes A1 et A2) peut être mise à profit pour accélérer la recherche de la pseudo inverse ; voire envisager d'obtenir son expression sous forme analytique.

D'ailleurs, dans le cas des systèmes non redondants, i.e.  $n=6$  l'obtention sous forme analytique de l'inverse de la matrice jacobienne définie en dehors des configurations singulières, ne devrait soulever aucune difficulté majeure, comme l'illustre l'exemple du robot vertical 80 (cf annexe A2).

Quelle que soit la représentation adoptée, l'inverse ou plus généralement la pseudo inverse de la matrice jacobienne  $J(q)$  est donnée par

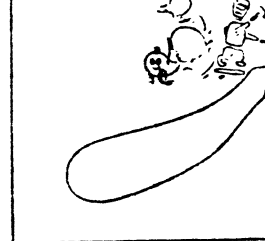
$$J^+(q) = \tilde{J}^+(q) N^{-1}(q) M^{-1}(q) \Omega^+(q) \quad (1.88)$$

L'étude des configurations singulières se fait, aisément en examinant le rang de la matrice  $\tilde{J}_p(q)$ . Dans le cas des systèmes non redondants, ces configurations sont simplement déterminées par le déterminant de cette matrice.

Le déterminant de  $\tilde{J}_p(q)$  pour le robot vertical 80 présenté au § 1.3.1. est donné par :

$$\det | \tilde{J}_p(q) | = l_2 l_3 (C2 l_2 + C23 l_3) S3 S5 \quad (1.89)$$





## I.6 - PARAMETRES D'OLINDE RODRIGUES

Les P.O.R. constituent, comme nous l'avons dit, un outil très intéressant pour la représentation des rotations de l'organe terminal. Avant tout développement, il convient de préciser, qu'à nos yeux l'intérêt de cette représentation est fondé sur son éventuelle capacité de former avec les coordonnées de position, un ensemble de coordonnées opérationnelles. En effet, son intérêt s'évalue dans le cas contraire, en la comparant aux représentations redondantes *non singulières* de la rotation. Le critère, par la nature du problème qui est alors posé, sera fortement pondéré par le volume de calcul mis en jeu pour l'obtention et la résolution du modèle variationnel.

Avant d'examiner le problème d'une représentation utilisant trois paramètres indépendants, nous développons une solution plus simple destinée aux systèmes commandés dans l'espace de coordonnées généralisées.

### I.6.1 - REPRESENTATION REDONDANTE UTILISANT LES P.O.R.

Le premier problème que soulève l'utilisation des P.O.R. est celui de la détermination de leurs signes, comme nous l'avons vu au § 1.3.4.

En effet, les éléments d'information concernant les signes des P.O.R., disponibles au niveau de la matrice de passage S, se limitent aux signes de six produits  $(\lambda_1\lambda_2), (\lambda_1\lambda_3), \dots, (\lambda_2\lambda_4)$  et  $(\lambda_3\lambda_4)$ .

Une solution extrêmement simple à ce problème est basée sur une propriété issue de la condition (1.30) sur la norme de  $\lambda$  ; elle s'énonce

#### Propriété 1.6.1.

"Quelle que soit la configuration du système, l'un au moins des paramètres  $\lambda_i, i \in \{1,2,3,4\}$  est tel que  $|\lambda_i| > 1/2$ "

L'on peut alors, raisonnablement supposer, qu'entre deux pas de calcul le signe du paramètre dont la valeur absolue est la plus élevée demeure constant. Hypothèse qui, pour un pas de calcul de 20 m s, reste vérifiée tant que la vitesse de rotation  $\omega$  n'a pas dépassé 100 rd/s !.

Partant d'une configuration initiale où les P.O.R. sont connus, les valeurs à tout instant  $t^k$  des paramètres  $\lambda^{(k)}$  sont donnés, suivant l'indice du paramètre dont la valeur absolue à l'instant  $t^{(k-1)}$  est la plus grande, par l'un des quatre systèmes :

	$ \lambda_1  = \max_i^{(k-1)} ( \lambda_i )$	$ \lambda_2  = \max_i^{(k-1)} ( \lambda_i )$	$ \lambda_3  = \max_i^{(k-1)} ( \lambda_i )$	$ \lambda_4  = \max_i^{(k-1)} ( \lambda_i )$
$\lambda_1^{(k)}$	$\Delta_1/4$	$(P_{32} - P_{23})/\Delta_2$	$(P_{13} - P_{31})/\Delta_3$	$(P_{21} - P_{12})/\Delta_4$
$\lambda_2^{(k)}$	$(P_{32} - P_{23})/\Delta_1$	$\Delta_2/4$	$(P_{21} + P_{12})/\Delta_3$	$(P_{31} + P_{13})/\Delta_4$
$\lambda_3^{(k)}$	$(P_{13} - P_{31})/\Delta_1$	$(P_{12} + P_{21})/\Delta_2$	$\Delta_3/4$	$(P_{23} + P_{32})/\Delta_4$
$\lambda_4^{(k)}$	$(P_{21} - P_{12})/\Delta_1$	$(P_{13} + P_{31})/\Delta_2$	$(P_{23} + P_{32})/\Delta_3$	$\Delta_4/4$

avec

$$\Delta_1 = 2 \operatorname{sgn} (\lambda_1^{(n-1)}) \sqrt{P_{11} + P_{22} + P_{33} + 1}$$

$$\Delta_2 = 2 \operatorname{sgn} (\lambda_2^{(n-1)}) \sqrt{P_{11} - P_{22} - P_{33} + 1}$$

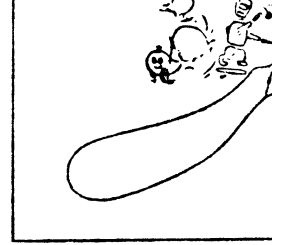
$$\Delta_3 = 2 \operatorname{sgn} (\lambda_3^{(n-1)}) \sqrt{-P_{11} + P_{22} - P_{33} + 1}$$

et

$$\Delta_4 = 2 \operatorname{sgn} (\lambda_4^{(n-1)}) \sqrt{-P_{11} - P_{22} + P_{33} + 1}$$

les  $P_{ij}$  étant les éléments de la matrice de passage S exprimés en fonction des coordonnées généralisées.





Les modèles géométriques et variationnels associés à cette représentation s'écrivent :

$$\chi = G_{\lambda} (q) \quad (1.91)$$

avec

$$\delta\chi = |x \ y \ z \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4|$$

et

$$\delta\chi = \Omega_{\lambda}(q) J_{\circ}(q) \delta q$$

où

$$\Omega_{\lambda}(q) = \left[ \begin{array}{c|c} \Pi_3 & \mathbb{0}_3 \\ \hline \mathbb{0}_{3,4} & \frac{1}{2} \overset{\vee}{\lambda}(q) \end{array} \right] \quad (1.92)$$

$\overset{\vee}{\lambda}(q)$  est la matrice donnée par la relation (1.53).

La résolution du système (1.92) est immédiate. En effet, la matrice  $\overset{\vee}{\lambda}(q)$  est égale à la matrice unité d'ordre 3. L'inverse à gauche  $\Omega_{\lambda}^{\dagger}(q)$  de  $\Omega_{\lambda}(q)$  est alors :

$$\Omega_{\lambda}^{\dagger}(q) = \left[ \begin{array}{c|c} \Pi_3 & \mathbb{0}_{3,4} \\ \hline \mathbb{0}_3 & 2 \overset{\vee}{\lambda}(q) \end{array} \right] \quad (1.93)$$

et la solution générale du système est donnée par la relation (1.87).

### I.6.2 - REPRESENTATION NON REDONDANTE

La représentation, objet du présent paragraphe, est essentiellement destinée aux systèmes que l'on désire contrôler dans l'espace opérationnel ; c'est un mode de commande auquel nous consacrons le chapitre III. Afin d'éviter toute anticipation inutile, nous allons commencer par nous poser le problème de la recherche de la représentation non redondante fournissant la meilleure précision lors de la résolution numérique du système (1.66). La solution à ce problème est, en effet, identique à celle que l'on aurait trouvée en se posant le problème initial, comme nous le verrons.

Les P.O.R. constituent les composantes d'un vecteur unitaire de l'espace euclidien à quatre dimensions. Rapportons cet espace à un "repère" orthonormé  $R(0, U_1, U_2, U_3, U_4)$  et considérons le point  $\lambda$  de coordonnées  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  dans ce repère. Ce point décrit, lorsque le temps varie, une trajectoire  $\mathcal{C}$  sur l'hyper surface  $\Sigma$  de l'hyper-sphère de rayon unité centrée à 0. La projection orthogonale suivant  $u_i$  de  $\mathcal{C}$ , est un lieu  $\mathcal{C}^{i}$  d'un domaine du sous-espace à trois dimensions décrit par  $\{U_j ; j \neq i\}$ . Ce domaine est délimité par une sphère unitaire  $S_i$  centrée à l'origine. Désignons par  $\mu^{(i)}$  les coordonnées d'un point de  $S_i$  dans un repère  $\mathcal{R}_i$ . Ces quantités sont, pour un choix particulier des  $\mathcal{R}_i$ , représentées sur la figure 1.10.

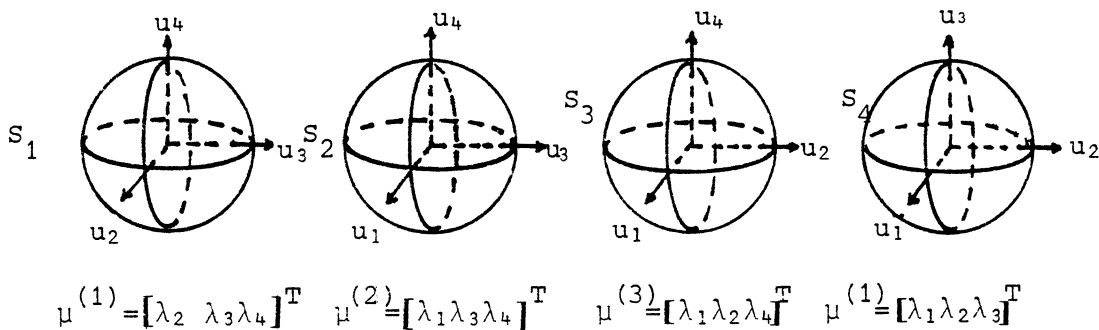


FIGURE 1.10 Définition de  $S_i$  et  $\mu^{(i)}$



En remarquant que tout point  $\mu^{(i)}$  appartenant à la surface  $s_i$  de la sphère  $S_i$  est la projection orthogonale suivant  $U_i$  d'un point  $\lambda$  de  $\Sigma$  pour laquelle la composante  $\lambda_i$  est nulle et que c'est uniquement à partir d'un tel point qu'à l'évolution de  $\mu^{(i)}$  correspond deux évolutions différentes de  $\lambda$  sur  $\Sigma$  ; l'on peut énoncer le lemme.

### Lemme 1.6.2

Toute évolution de  $\lambda$  décrivant, à partir d'une configuration initiale  $\lambda_0$ , une trajectoire  $C$  sur  $\Sigma$  est définie par les paramètres  $\mu^{(i)}$ , si et seulement si le lieu  $C^{+i}$ , projection orthogonale de  $C$  suivant  $U_i$ , est contenu dans le domaine :

$$\bar{S}_i \triangleq \{ \mu^{(i)} : \mu^{(i)} \in S_i \text{ et } \mu^{(i)} \notin s_i \}$$

$\mu^{(i)}$  sera dit représentatif de cette évolution.

Notons que l'analyse de l'équation résultant de la différentiation de la norme de  $\lambda$  permet, elle aussi de vérifier ce lemme.

En utilisant la propriété 1.6.1, l'on peut, aisément, en vertu du lemme 1.6.2 vérifier :

### Corollaire 1.6.3

Au voisinage de toute configuration  $\lambda$ , il existe une portion non nulle de l'hyper-surface  $\Sigma$  et un triplet de paramètres  $\mu^{(i)}$ ,  $i \in \{1,2,3,4\}$  ; tel que  $\mu^{(i)}$  est représentatif de toute évolution de  $\lambda$  effectuée sur cette portion.

A partir d'une configuration initiale du système, l'évolution de l'orientation de l'organe terminal peut alors être décrite par une succession de triplets de paramètres  $\mu^{(i)}$ ,  $i \in \{1,2,3,4\}$ .

Le premier problème qui se pose est celui de rechercher les opérateurs tels que  $(\bar{\nabla})$  (cf § 1.4.3) qui interviennent dans les matrices jacobien-  
nes associées aux  $\mu^{(i)}$ . Comme  $\bar{\lambda}$  de la relation (1.54), correspondant à la

représentation  $\mu^{(1)} = |\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4|^T$  les opérateurs associés aux différents  $\mu^{(i)}$  font intervenir le paramètre  $\lambda_i$ . Ils se déduisent par la suppression des premières lignes des matrices  $4 \times 3$  relatives à des opérateurs tels que ( $\checkmark$ ) de la relation (1.53) que nous allons déterminer.

Considérons les quatre matrices colonnes  $|\lambda_1 | \mu^{(1)}|^T$   $|\lambda_2 | \mu^{(2)}|^T$   $|\lambda_3 | \mu^{(3)}|^T$  et  $|\lambda_4 | \mu^{(4)}|^T$ . Elles constituent quatre représentations du vecteur relatives à quatre systèmes de coordonnées de l'espace à quatre dimensions dont les définitions sont complétées en fixant l'ordre dans lequel sont rangés les paramètres dans les  $\mu^{(i)}$ . Quel que soit le choix de l'ordre des paramètres de  $\mu^{(i)}$ , on peut aisément vérifier que l'opérateur ( $\checkmark$ ) défini par  $|\lambda_2 | \mu^{(1)}|^T$  ne reste pas invariant par un changement de coordonnées tel que  $|\lambda_i | \mu^{(i)}|^T$  ( $i=2,3,4$ ). Des matrices différentes  $\Omega_R(q)$  et  $\Omega_R^{-1}(q)$  sont alors à considérer comme d'autres grandeurs que nous verrons intervenir dans le chapitre (cf III). Ce qui ne va pas dans le sens de réduire la complexité du système de commande.

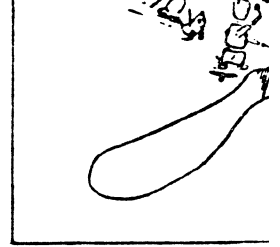
Il existe cependant, comme nous le montrons dans l'annexe A3, trois systèmes de coordonnées formant avec le système initial  $\lambda \underline{\Delta} |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4|^T$  un ensemble de systèmes de coordonnées pour lesquelles l'opérateur ( $\checkmark$ ) défini par la relation (1.53) est invariant.

Ces systèmes s'obtiennent à partir de  $\lambda$  par des transformations effectuées à l'aide des matrices orthogonales d'ordre 4  $S_i$  qui vérifient :

$$S_i \checkmark \lambda = \checkmark S_i \lambda \quad (i = 1, 2, 3)$$

En désignant respectivement par  $\lambda^{(1)}$   $\lambda^{(2)}$   $\lambda^{(3)}$  et  $\lambda^{(4)}$  les quatre système de l'ensemble  $\{\lambda, S_1\lambda, S_2\lambda, S_3\lambda\}$  et en utilisant les relations de l'annexe A3, on peut établir :

$$\lambda^{(1)} = \left| \frac{\lambda_1}{\mu^{(1)}} \right| ; \quad \lambda^{(2)} = \left| \frac{\lambda_2}{\mu^{(2)}} \right| ; \quad \lambda^{(3)} = \left| \frac{\lambda_3}{\mu^{(3)}} \right| \quad \text{et} \quad \lambda^{(4)} = \left| \frac{\lambda_4}{\mu^{(4)}} \right|$$



$$\mu^{(1)} = \begin{vmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{vmatrix} \quad \mu^{(2)} = \begin{vmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_4 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} \quad \mu^{(3)} = \begin{vmatrix} \lambda_4 \\ -\lambda_0 \\ -\lambda_1 \end{vmatrix} \quad \mu^{(4)} = \begin{vmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -\lambda_0 \end{vmatrix} \quad (1.94)$$

La propriété *d'invariance* de l'opérateur ( $\nabla$ ) pour les systèmes de coordonnées (1.94), nous permet, quant à la mise en équation du système, de faire abstraction de toute distinction entre les  $\lambda^{(i)}$ .

Désignons par  $\sigma$  la matrice  $|\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4|^T$  dont les éléments sont alignés sur ceux de  $\lambda^{(i)}$  correspondante à la matrice  $\mu^{(i)}$  adoptée pour la représentation de l'orientation de l'organe terminal à partir d'une configuration donnée. Le modèle géométrique s'écrit :

$$\chi = G_{\text{OR}}(q) \quad (1.95)$$

avec

$$\chi = |x \ y \ z \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4|^T$$

Et la matrice de l'opérateur ( $\bar{\nabla}$ ) est donnée par :

$$\bar{\nabla} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & -\sigma_3 \\ -\sigma_4 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & -\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} \quad (1.96)$$

D'où le modèle variationnel

$$\delta\chi = \Omega_{\text{OR}}(q) J_0(q) \delta q \quad (1.97)$$

avec

$$\Omega_{\text{OR}}(\mathfrak{q}) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \hline \mathbb{O}_3 & \frac{1}{2} \overline{\sigma} \end{array} \right]$$

dont la résolution fait appel à l'inverse de  $(\overline{\sigma})$ . La représentativité du triplet  $(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  suppose que  $\sigma_1 \neq 0$ , d'où :

$$\overline{\sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1} \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_4 & \sigma_2 \sigma_4 + \sigma_1 \sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_4 & \sigma_1^2 + \sigma_3^2 & \sigma_3 \sigma_4 - \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_2 \sigma_4 - \sigma_1 \sigma_3 & \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 + \sigma_4^2 \end{array} \right] \quad (1.98)$$

Ces équations restent invariantes par tout changement entre les systèmes de coordonnées (1.94), changement qui ne se manifeste qu'au niveau de la matrice  $\sigma$ .

Ayant fixé les quatre systèmes de coordonnées associées aux triplets de paramètres représentatifs  $\mu^{(i)}$ , il nous reste à déterminer la manière dont il convient de procéder pour effectuer, lorsque le système occupe une configuration donnée, le choix entre les différents triplets de paramètres  $\mu^{(i)}$  possibles.

En effet, en dehors des huit configurations où seul l'un des P.O.R est non nul, le choix d'un triplet  $\mu^{(i)}$  représentatif de l'évolution sur une portion de  $\Sigma$  au voisinage d'une configuration  $\lambda$ , n'est pas unique.

Intuitivement le meilleur choix de paramètres lorsque le système occupe une configuration  $\lambda$  est celui du triplet  $\mu^{(i)}$  correspondant au paramètre  $\lambda_i$  dont la valeur absolue est la plus grande. L'interprétation géométrique de ce choix se fait en considérant le plan défini par les deux vecteurs  $U_i$  et  $\lambda$ . En effet, la configuration  $\lambda^*$  de la frontière du domaine de la représentativité de  $\mu^{(i)}$  située sur le parcours minimal de  $\lambda$  sur  $\Sigma$ , est un point du plan  $(U_i, \lambda)$  tel que  $\lambda^*$  est perpendiculaire à  $U_i$ . La valeur absolue  $|\lambda_i|$  apparaît donc comme l'arc sinus de l'angle  $\delta_i$  que l'on peut considérer comme la marge de représentativité de  $\mu^{(i)}$  dans la configuration  $\lambda$  (cf figure 1.11)

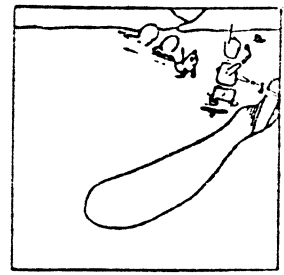
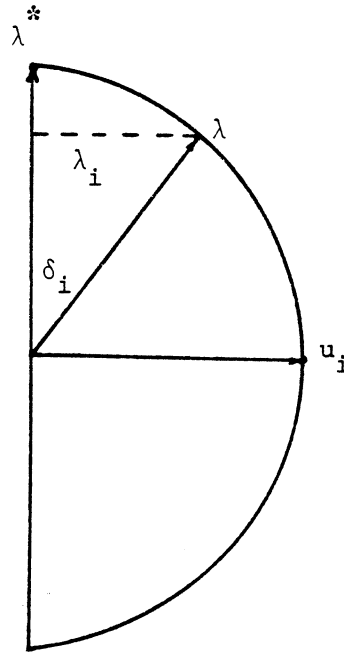


FIGURE 1.11 : DEFINITION DE L'ANGLE  $\delta_i$

En adoptant le choix de  $\mu^{(i)}$  correspondant à la plus élevée des valeurs absolues des  $|\lambda_i|$  on assure la meilleure précision lors de la résolution numérique du système (1.97) comme le montre l'examen de la relation (1.98).

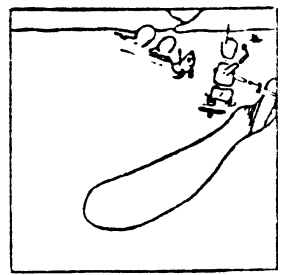
En vertu de la propriété 1.6.1., il existe quelle que soit la configuration du système, un triplet  $\mu^{(i)}$  tel que :

$$\pi/6 < \delta_i < \pi/2 \quad (1.99)$$

Notons que la détermination des P.O.R. fait appel, comme nous l'avons vu au § 1.6.1 à  $|\lambda_i|_{\max}$ . La représentation que nous venons de développer n'introduit donc aucun nouveau calcul. Elle s'obtient en opérant uniquement des permutations et des changements de signes sur les éléments de la matrice  $\sigma$ .







## I.7 - CONCLUSION

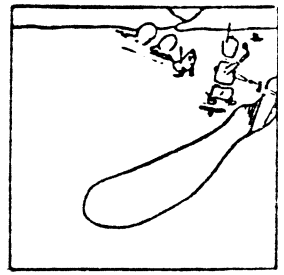
Après avoir examiné les principaux systèmes de représentation de l'organe terminal et établi les relations géométriques qui les expriment en fonction des coordonnées généralisées, une formulation intéressante pour l'élaboration des modèles variationnels a été suivie.

Cette formulation qui a consisté à développer ces différents systèmes à partir du modèle variationnel de base, a permis de faire apparaître les propriétés mathématiques des matrices associées à ces modèles, ce qui a conduit, en utilisant une décomposition judicieuse de la matrice jacobienne de base [REN80T] à une approche analytique fort avantageuse du problème de la résolution du modèle variationnel.

Par rapport aux méthodes algorithmiques de résolution, cette approche analytique du problème permet de réaliser un gain considérable en temps de calcul. Ce gain s'établit dans un rapport d'environ 10 dans le cas du robot vertical 80 [BEN80C].

Deux solutions permettant l'utilisation des P.O.R. ont été développées. Nous reviendrons au troisième chapitre sur les différentes représentations de l'orientation de l'organe terminal et nous verrons l'apport appréciable des propriétés obtenus au niveau du problème de la commande.

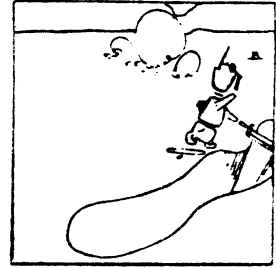




## CHAPITRE II

### COMMANDE DYNAMIQUE





## II.1 - INTRODUCTION

L'un des éléments fondamentaux dans la conception des robots-manipulateurs est le développement, au niveau du pilotage de leurs organes de puissance, des systèmes de commande susceptibles de répondre, avec précision, à des évolutions rapides imposées ou modifiées "en ligne".

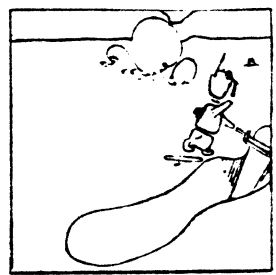
La possibilité de réagir en "temps réel" est, en effet, une propriété essentielle, de laquelle dépendra toute adaptativité de fonctionnement du système.

La rapidité, imposée par la nature de la tâche à exécuter, ou, recherchée pour augmenter la rentabilité du système, est génératrice au niveau des articulations du robot-manipulateur de très importantes perturbations. Face à l'insuffisance des systèmes classiques d'asservissement local à assurer le maintien des performances imposées, se sont développées, à partir du modèle mathématique du système, diverses approches de commande dynamique.

Dans ce chapitre et après avoir succinctement présenté le modèle dynamique d'un mécanisme articulé, les influences des différentes sources perturbatrices sur le système seront analysées et des conclusions nouvelles quant aux simplifications généralement pratiquées sur le modèle dynamique seront dégagées.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'examen des principaux systèmes de commande dynamique assurant le découplage des mouvements articulaires.





## II - MODELE DYNAMIQUE

Le modèle dynamique constitue avec les deux modèles géométrique et cinématique un ensemble d'outils indispensables pour la conception, la synthèse de la commande et l'analyse du comportement des robots-manipulateurs.

Poursuivant l'étude des mouvements des satellites déformables, W.Hooker et G.Margulies [H0065] ont développé l'un des premiers modèles dynamiques d'un mécanisme constitué de  $n+1$  corps articulés suivant  $n$  articulations du type rotatif. Issue du formalisme de Newton-Euler, la solution obtenue présente l'inconvénient de nécessiter l'élimination des couples de contraintes.

En 1968, J.J.Uicker[UIC68] a présenté une méthode basée sur le formalisme de Lagrange, permettant l'obtention d'équations explicites du mouvement dans le cas général des systèmes comportant des segments télescopiques. Cette méthode conduit cependant à des calculs inutiles, ce qui alourdit sensiblement la procédure de mise en équation.

D'autres solutions utilisant d'autres formalismes tel que celui de Gibbs Appell, d'Alembert ou d'Hamilton ont été proposées. Une synthèse bibliographique exhaustive de ces travaux a été réalisée par M.Renaud [REN75 - REN80T] qui propose une solution intéressante permettant d'éviter les calculs littéraux redondants que fait apparaître la procédure de Uicker [UIC68] en introduisant dans le formalisme de Lagrange la notion de "corps augmenté" [LIE74], utilisée par W.Hooker[H0065]. Signalons également la méthode numérique itérative de mise en équation utilisée par M.Vukobratović[VUK73] et F.M.Kulakov [KUL76] qui présente le même avantage quant à la suppression des calculs redondants [KHA78A].

Les systèmes généralement étudiés ont la structure d'arbre topologique et comme l'a proposé P.W.Likins [LIK71], les articulations considérées possèdent un seul degré de liberté, cas dans lequel on peut toujours se replacer

par adjonction éventuelle de corps de masse nulle.

Le système étant supposé à liaisons indépendantes du temps, son énergie cinétique est une forme quadratique de vitesses généralisées :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \quad (2.1)$$

La matrice  $A(q)$  dite matrice d'énergie cinétique du manipulateur est de dimension  $n \times n$  et définie positive.

En désignant par  $V(q)$  l'énergie potentielle due à la pesanteur et par :  $\Gamma \triangleq [\Gamma_1 \dots \Gamma_i \dots \Gamma_n]^T$  le vecteur des  $n$  forces généralisées, les  $n$  équations de Lagrange régissant le comportement dynamique du système s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.2)$$

où  $L$  est le lagrangien du système défini par :

$$L(q, \dot{q}) \triangleq T(q, \dot{q}) - V(q)$$

Sous forme matricielle, le système (2.2.) s'écrit :

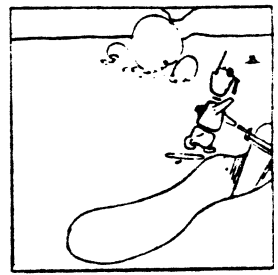
$$A(q) \ddot{q} + b(q, \dot{q}) - g(q) = \Gamma \quad (2.3)$$

$b(q, \dot{q})$  est la matrice colonne des forces centrifuges et de Coriolis dont le  $i$ ème élément s'écrit :

$$b_i(q, \dot{q}) = \dot{q}^T \mathcal{B}_i(q) \dot{q} \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{B}_i(q)$  est la matrice symétrique de dimension  $n \times n$  dont les éléments sont les symboles de Christoffel de seconde espèce faisant intervenir les dérivées partielles par rapport aux coordonnées généralisées des éléments  $a_{ij}$  de la matrice  $A(q)$  ; ils s'écrivent :





$$c^{i,j,k} \triangleq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (2.5)$$

Les éléments de la matrice colonne  $g(q)$  sont les forces de pesanteur dérivant du potentiel  $V(q)$  ; ils sont donnés par :

$$g(q) = - \frac{\partial V(q)}{\partial q} \quad (2.6)$$

Une seconde forme matricielle est obtenue [VUK75] en introduisant les écritures symboliques  $[\dot{q} \dot{q}]$  et  $[\dot{q}^2]$  représentant deux matrices colonnes de dimensions respectives  $n(n-1)/2 \times 1$  et  $n \times 1$  et définies par :

$$[\dot{q} \dot{q}] \triangleq \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \dot{q}_1 \dot{q}_2 & \dot{q}_1 \dot{q}_3 & \dots & \dot{q}_1 \dot{q}_n & \dot{q}_2 \dot{q}_3 & \dots & \dot{q}_2 \dot{q}_n & \dots & \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{array} \right]^T$$

$$[\dot{q}^2] \triangleq \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \dots & \dot{q}_n^2 \end{array} \right]^T \quad (2.7)$$

Le système (2.2) s'écrit :

$$A(q) \ddot{q} + B(q) [\dot{q} \dot{q}] + C(q) [\dot{q}^2] - g(q) = \Gamma \quad (2.8)$$

où  $B(q)$  et  $C(q)$  sont respectivement la matrice des forces de Coriolis de dimension  $n \times n(n-1)/2$  et la matrice des forces centrifuges de dimension  $n \times n$  elles sont données par [REN80T]:

$$B(q) = 2 \begin{vmatrix} b^{1,12} & b^{1,13} & \dots & b^{1,1n} & b^{1,23} & \dots & b^{1,2n} & \dots & b^{1,(n-1)n} \\ b^{2,12} & b^{2,13} & \dots & b^{2,1n} & b^{2,23} & \dots & b^{2,2n} & \dots & b^{2(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b^{n,12} & b^{n,13} & & b^{n,1n} & b^{n,2n} & & b^{n,2n} & & b^{n,(n-1)n} \end{vmatrix}$$

et

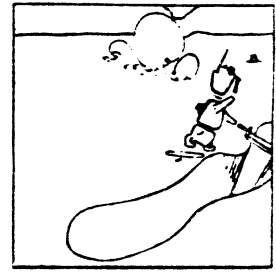
(2.9)

$$C(q) = \begin{vmatrix} b^{1,11} & b^{1,22} & \dots & b^{1,nn} \\ b^{2,11} & b^{2,22} & \dots & b^{2,nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n,11} & b^{n,22} & \dots & b^{n,nn} \end{vmatrix}$$

Les éléments de la matrice  $B(q)$  seront notés  $b_{ijk}$  i.e.  $b_{ijk} = 2b^{i,jk}$  ; ceux de  $C(q)$  seront notés  $C_{ij}$ .

Les expressions des éléments des différentes matrices intervenant dans le modèle dynamique deviennent très lourdes dès que le nombre des degrés de liberté dépasse trois. Le calcul "à la main" de ces éléments ne peut, dans ces conditions, être envisagé.

Ainsi, des programmes de génération automatique permettant l'obtention des expressions littérales des éléments des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$ ,  $C(q)$  et  $g(q)$  ont été développés. Outre les programmes T.O.A.D. (Teleoperator Arm Design) [STU73] et O.S.S.A.M. (Ohio State Symbolic Algebraic Manipulator) [DIL74] indiqués dans [KHAL76] et [LIE76]; signalons les deux programmes : E.D.Y.L.M.A. (Equation DYnamique Litterale d'un Manipulateur articulé) développé par W.Khalil [KHAL76 KHAL78] et E.G.A.M. (Equation Generation of Articulated Mechanism) développé par J.Zabala Iturralde [ZAB78] qui constituent deux outils performants pour l'obtention des équations dynamiques des robots-manipulateurs.



### II.3 - ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE

La transposition des techniques classiques de la commande aux systèmes non linéaires et multidimensionnels que sont les mécanismes articulés repose essentiellement sur l'hypothèse de "faible interaction" entre les différents mouvements articulaires de ces mécanismes. Dans cette optique, le système est assimilé à un ensemble de sous-systèmes découplés dont chacun est constitué d'un actionneur et d'une charge.

Si cette hypothèse est légitimement justifiée lorsque les vitesses, les accélérations et les amplitudes des mouvements articulaires sont faibles, elle ne saurait l'être dès que ces grandeurs deviennent importantes, d'autant plus qu'une précision relativement élevée est requise.

Afin d'illustrer l'insuffisance de cette approche simplificatrice de la commande et pour mettre en évidence les différentes sources perturbatrices et d'en évaluer les effets sur le comportement dynamique du système, examinons à titre d'exemple l'asservissement d'un actionneur électrique agissant sur la  $i^{\text{ème}}$  articulation d'un robot-manipulateur dont le schéma est représenté sur la figure 2.1.

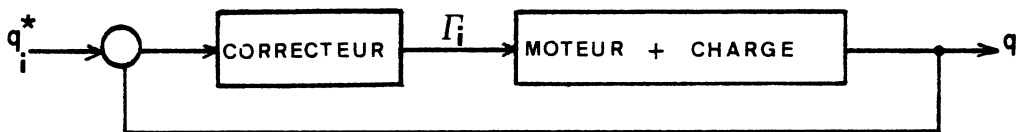


FIGURE 2.1 : Asservissement classique d'un actionneur

En faisant abstraction des frottements et de la constante de force contre-électromotrice, la fonction de transfert du système à commander s'écrit :

$$S_i(p) = \frac{1}{a_i^* p^2} \quad (2.10)$$

où  $a_i^*$  est la valeur présumée de l'inertie entraînée par le moteur,  $p$  étant la variable de Laplace.

A l'aide d'un correcteur du type PD, fixant une pulsation propre  $\omega_i^*$  et un facteur d'amortissement  $\xi_i^*$  ; soit :

$$C_i^*(p) = a_i^* k_i^* (p + z_i^*) ; \quad (2.11)$$

avec

$$k_i^* = 2 \xi_i^* \omega_i^* \quad \text{et} \quad z_i^* = \omega_i^* / 2 \xi_i^*$$

la fonction de transfert du système asservi s'écrit :

$$H_i^*(p) = \frac{k_i^* (p + z_i^*)}{p^2 + 2 \xi_i^* \omega_i^* p + \omega_i^{*2}} \quad (2.12)$$

Les performances d'un tel asservissement ne sont en réalité maintenues que dans la mesure où toutes les articulations ( $j ; j \neq i$ ) sont forcées à rester bloquées et où le couple statique dû à la pesanteur est contrebalancé.

En mouvement, les différents corps articulés agissent sur le système  $S_i$ , comme le montre l'examen du modèle dynamique (2.8). Analysons les effets de cette action schématisée sur la figure 2.2.

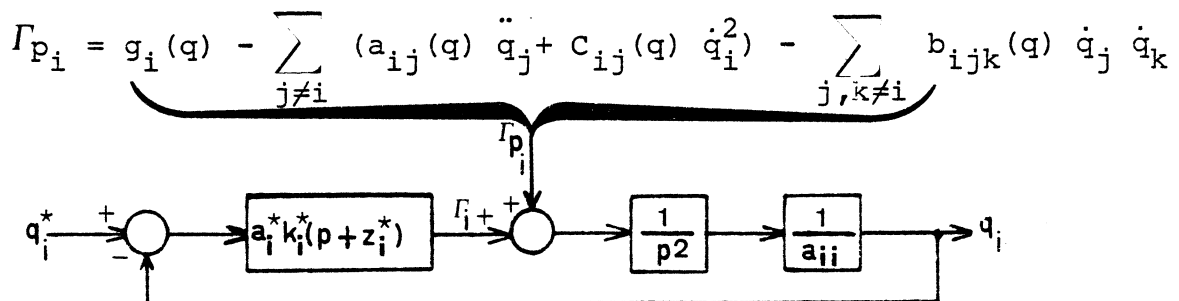
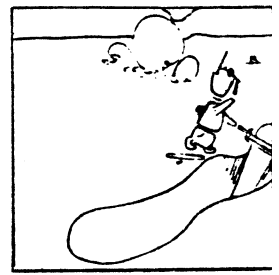


FIGURE 2.2. : Fonctionnement réel de l'asservissement



### 2.3.1 - INFLUENCE DE LA VARIATION DE L'INERTIE $a_{ii}$

Abstraction faite des perturbations  $\Gamma_{p_i}$ , la fonction de transfert du système en tenant compte de l'évolution de l'inertie s'écrit :

$$H_i(p) = \frac{k_i (p + z_i^*)}{p^2 + 2\xi_i \omega_i p + \omega_i^2} \quad (2.13)$$

$$k_i = \eta_i^2 k_i^*, \quad \xi_i = \eta_i \xi_i^* \quad \text{et} \quad \omega_i = \eta_i \omega_i^* \quad \text{où} \quad \eta_i = \sqrt{\frac{a_i^*}{a_{ii}}}$$

Une variation de l'inertie  $a_{ii}$  fait donc évoluer le coefficient  $k_i$ , le facteur d'amortissement  $\xi_i$  et la pulsation propre  $\omega_i$ . Cette évolution se fait proportionnellement au rapport de l'inertie présumée et de l'inertie réelle pour le coefficient  $k_i$  et dans une proportion égale à la racine de ce rapport en ce qui concerne  $\xi_i$  et  $\omega_i$ . La variation de l'inertie n'aura donc aucune influence sur le régime permanent et notamment sur l'erreur de trainage qui, rappelons le, est proportionnelle à  $\frac{2\xi_i}{\omega_i}$ .

Quant aux performances du régime transitoire, l'incidence de la variation de l'inertie reste généralement peu significative et peut dans nombre de cas, être circonscrite.

Un bon amortissement du régime transitoire nécessite d'assurer une valeur minimale  $(\xi_i)_{\min}$  du facteur d'amortissement. Cette valeur est atteinte pour la configuration où  $a_{ii} = (a_{ii})_{\max}$ . L'examen de la manière dont le produit du temps de réponse par la pulsation propre i.e.  $T_i \omega_i$ , évolue en fonction du facteur d'amortissement [GIL67] montre qu'il y a intérêt à prendre  $(\xi_i)_{\min} \geq 0,7$ , ceci permet notamment de se placer dans les conditions où les répercussions de l'augmentation de  $\xi_i$  sont en partie compensées par l'évolution de  $\omega_i$  qui opère en sens inverse. Dans ce domaine des variations de  $\xi_i$ , i.e.  $\xi_i \geq 0,7$ , il est aisé de vérifier que l'augmentation du temps de réponse est peu différente de la quantité :

$$\Delta \text{Tr}_i \approx \frac{1}{0.6 \omega_i^*} \left(1 - \frac{1}{\eta_i}\right) \quad \text{avec} \quad \eta_i = \sqrt{\frac{a_i^*}{a_{ii}}} \quad (2.14)$$

L'utilisation de cette dernière relation permet de déterminer la valeur de  $a_i^*$  assurant les écarts les plus faibles de  $|\Delta \text{Tr}_i|$  lorsque  $a_{ii}$  évolue entre  $(a_{ii})_{\min}$  et  $(a_{ii})_{\max}$ , cette valeur est donnée par :

$$a_i^* = \frac{1}{4} \left( \sqrt{(a_{ii})_{\min}} + \sqrt{(a_{ii})_{\max}} \right)^2 \quad (2.15)$$

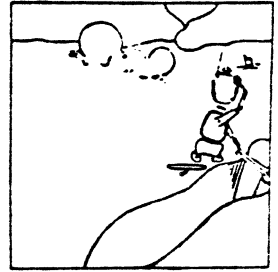
En adoptant cette valeur de l'inertie, la condition sur la valeur minimale de  $\xi_i$  s'écrit :

$$\xi_i^* \geq 1.4 \mu_i / (1 + \mu_i) \quad \text{avec} \quad \mu_i = \sqrt{\frac{(a_{ii})_{\max}}{(a_{ii})_{\min}}} \quad (2.16)$$

quant à  $\omega_i^*$ , elle sera fixée en tenant compte de l'écart maximum de  $\text{Tr}_i$  donné par :

$$\left| \Delta \text{Tr}_i \right|_{\max} = \frac{1}{0.6 \omega_i^*} \frac{\mu_i - 1}{\mu_i + 1} \quad (2.17)$$

La valeur type du rapport  $(a_{ii})_{\max}/(a_{ii})_{\min}$  est d'environ deux [MAR73]. En effet, si des rapports beaucoup plus importants peuvent être observés au niveau de l'inertie vue par une articulation, les valeurs de ces rapports sont sensiblement moins élevées en ce qui concerne l'inertie vue par le moteur. Cette diminution est d'autant plus importante que le rapport de réduction du moteur est grand. Ainsi, pour le robot vertical 80, le rapport des valeurs extrêmes de l'inertie vue par la première articulation est de 31, alors que le rapport correspondant à l'inertie entraînée par le moteur est inférieur à 2. L'écart  $|\Delta \text{Tr}_i|_{\max}$  est alors inférieur à  $0.3/\omega_i^*$ . Pour un facteur d'amortissement  $\xi_i^*$  de l'ordre de 1, cet écart représente une augmentation maximale du temps de réponse inférieure à 6%.



L'influence de la variation de l'inertie n'est alors significative que lorsque le rapport  $(a_{ii})_{\max}/(a_{ii})_{\min}$  est très élevé, l'écart  $|\Delta Tr_i|_{\max}$  tend alors vers la valeur limite  $1/0.6 \omega_i^*$ , qui correspond, pour une valeur de 0.7 du facteur d'amortissement, à une augmentation du temps de réponse d'environ 56 %.

### 2.3.2 - INFLUENCE DES PERTURBATIONS

L'examen du modèle dynamique (2.8) montre que le couple réellement appliqué au niveau d'une articulation (i), est la somme algébrique du couple moteur  $\Gamma_i$  et d'un couple perturbateur  $\Gamma_{p_i}$  (cf figure 2.2). Le couple  $\Gamma_{p_i}$  est développé par l'action de la pesanteur et par les effets, lorsque le système est en mouvement, des couplages inertiels, des forces centrifuges et des forces de Coriolis, il est donné par :

$$\Gamma_{p_i}(t) = g_i[q(t)] - \sum_{j \neq i} \left[ a_{ij}[q(t)] \ddot{q}_j(t) + c_{ij}[q(t)] \dot{q}_j^2(t) \right] - \sum_{j, k \neq i} b_{ijk}[q(t)] \dot{q}_j(t) \dot{q}_k(t) \quad (2.18)$$

Abstraction faite de la variation de l'inertie, cette perturbation fait apparaître au niveau de l'asservissement de la figure 2.2. un écart  $\delta p_i$  que l'on peut exprimer par :

$$\delta p_i(p) = \frac{H_i(p)}{C_i(p)} \Gamma_{p_i}(p) \quad (2.19)$$

$$\delta p_i(p) = \frac{1/a_{ii} \omega_i^2}{1 + 2\xi_i p/\omega_i + p^2/\omega_i^2} \Gamma_{p_i}(p)$$

Afin de donner une évaluation quantitative de l'influence des perturbations  $\Gamma_{p_i}(t)$  sur l'écart  $\delta p_i(t)$ , soumettons les articulations  $j : (j \in \{1, \dots, n\} ; j \neq i)$  à des essais harmoniques de même pulsation et de même amplitude et maintenons l'articulation (i) en régulation, soient :

$$q_i(t) = q_{i0} \quad (2.20)$$

$$q_j(t) = q_{j0} + e_0 \sin \omega_0 t \quad (j \in \{1, \dots, n\} ; j \neq i)$$

Oscillant autour des valeurs relatives à la configuration nominale  $q_0$ , les éléments  $a_{ij}[q(t)]$ ,  $b_{ijk}[q(t)]$  et  $c_{ij}[q(t)]$  seront, afin de simplifier le calcul, supposés constants. Ceci est justifié dans la mesure où l'on cherche une évaluation grossière du phénomène.

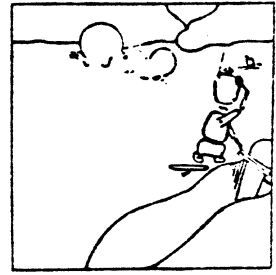
En faisant abstraction du couple statique dû à la pesanteur, la perturbation dynamique est de la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma_{p_i}(t) &\approx -\alpha_i + \beta_i \sin \omega_0 t - \alpha_i \cos 2\omega_0 t \\ \alpha_i &= \frac{\omega_0^2 e_0^2}{2} \left[ \sum_{j \neq i} c_{ij}(q_0) \sum_{j, k \neq i} b_{ijk}(q_0) \right] \\ \beta_i &= \omega_0^2 e_0 \sum_{j \neq i} a_{ij}(q_0) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Par cette perturbation, l'articulation (i) est soumise à l'accélération

$$\gamma_{p_i}(t) = \Gamma_{p_i}(t) / a_{ii} \quad (2.22)$$





faisant apparaître l'écart :

$$\varepsilon_{p_i}(t) = \frac{1}{a_{ii}} \left[ -\alpha_i E_i(0) + \beta_i E_i(\omega_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_i(\omega_0)) \right. \\ \left. - \alpha_i E_i(2\omega_0) \cos(2\omega_0 t + \varphi_i(2\omega_0)) \right]$$

avec

$$E_i(\omega) = \frac{1 / \omega_i^2}{\left[ (1 - \omega^2 / \omega_i^2)^2 + 4 \xi_i^2 \omega^2 / \omega_i^2 \right]^{1/2}} \quad (2.23)$$

et

$$\varphi_i(\omega) = \text{arctg} \frac{-2\xi_i \omega / \omega_i}{1 - \omega^2 / \omega_i^2}$$

En amplitude, cet écart peut donc atteindre :

$$\left| \varepsilon_{p_i} \right|_{\max} \approx \eta_i / a_{ii} \quad (2.24)$$

où

$$\eta_i = |\alpha_i| [E_i(0) + E_i(2\omega_0)] + |\beta_i| E_i(\omega_0)$$

Exprimant un résultat classique de la théorie des asservissements linéaires, la relation (2.24) nous permet de formuler un résultat fondamental quant à l'évaluation de l'influence des perturbations sur les différentes articulations du système.

Souvent considérés comme négligeables, les effets des forces de couplage au niveau des dernières articulations peuvent être en réalité beaucoup plus néfastes que ceux qui se manifestent au niveau des premières articulations de la chaîne.

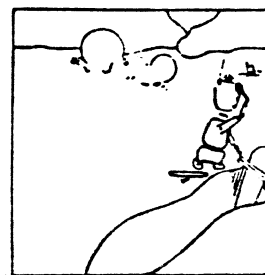
En effet, l'influence des perturbations sur une articulation comme le montre la relation (2.24) devrait être estimée non pas par le poids des paramètres dynamiques relatifs aux forces de couplage qui agissent au niveau de cette articulation, mais par les valeurs relatives de ces paramètres par rapport à l'inertie vue par l'articulation.

Nous allons, afin d'illustrer ce résultat, appliquer les essais (2.20) sur le robot vertical 80 dont les paramètres dynamiques ont été identifiés par Y.Hubert [HUB81]

Exemple : choisissons arbitrairement la configuration nominale :

$$q_0 \triangleq \begin{array}{|c} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \\ q_{40} \\ q_{50} \\ q_{60} \end{array} = \begin{array}{|c} 0 \\ \pi/6 \\ \pi/6 \\ \pi/4 \\ \pi/4 \\ 0. \end{array}$$

Pour cette configuration, les valeurs numériques des éléments des matrices  $A(q_0)$ ,  $B(q_0)$  et  $C(q_0)$  sont données sur le tableau 2.3.


**MATRICE D'ENERGIE CINÉTIQUE A(q<sub>o</sub>)**

.191E + 04	-.239E + 01	-.613E + 01	-.567E + 01	-.779E + 01	.000E + 00
-.239E + 01	.252E + 04	.515E + 03	-.109E + 02	.827E + 01	.000E + 00
-.613E + 01	.515E + 03	.800E + 03	-.697E + 01	.757E + 01	.000E + 00
-.567E + 01	-.109E + 02	-.697E + 01	.316E + 01	.000E + 00	.000E + 00
-.779E + 01	.827E + 01	.757E + 01	.000E + 00	.350E + 01	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.200E + 01

**MATRICE DES FORCES DE CORIOLIS B(q<sub>o</sub>)**

*Colonnes (1 à 5)*

-.108E + 04	-.631E + 03	.130E + 02	-.214E + 02	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	-.174E + 02	-.169E + 02	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	-.129E + 02	-.125E + 02	.000E + 00
.174E + 02	.129E + 02	.000E + 00	.210E + 01	.000E + 00
.169E + 02	.125E + 02	-.210E + 01	.000E + 00	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00

*Colonnes (6 à 10)*

-.635E + 01	.103E + 01	.728E + 00	.000E + 00	.103E + 01
-.257E + 03	.408E + 01	-.344E + 02	.000E + 00	.408E + 01
.000E + 00	-.446E + 00	-.188E + 02	.000E + 00	-.446E + 00
.446E + 00	.000E + 00	.133E + 01	.000E + 00	.000E + 00
.188E + 02	-.133E + 01	.000E + 00	.000E + 00	-.133E + 01
.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00

*Colonnes (11 à 15)*

.728E + 00	.000E + 00	-.133E + 02	.000E + 00	.000E + 00
-.344E + 02	.000E + 00	-.218E + 02	.000E + 00	.000E + 00
-.188E + 02	.000E + 00	-.140E + 02	.000E + 00	.000E + 00
.133E + 01	.000E + 00	.166E + 01	.000E + 00	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00

**MATRICE DES FORCES CENTRIFUGES C(q<sub>o</sub>)**

.000E + 00	-.713E + 01	-.317E + 01	.746E + 01	.719E + 01	.000E + 00
.542E + 03	.000E + 00	-.128E + 03	-.108E + 02	-.134E + 02	.000E + 00
.315E + 03	.128E + 03	.000E + 00	-.685E + 01	-.632E + 01	.000E + 00
-.651E + 01	-.204E + 01	.223E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00
.107E + 02	.172E + 02	.940E + 01	-.829E + 00	.000E + 00	.000E + 00
.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00	.000E + 00

**TABLEAU 2.3 : COEFFICIENTS DYNAMIQUES POUR LA CONFIGURATION**  
q<sub>o</sub> DU ROBOT VERTICAL 80

Les correcteurs  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) sont réglés de telle sorte que ( $\xi_i = 1$  et  $\omega_i = 10$ ) et que la variation de l'inertie vue par chaque articulation soit compensée. L'articulation maintenue en régulation est  $q_4$ .

$$q_4(t) = q_{40} \quad (2.25)$$

$$q_j(t) = q_{j0} + e_0 \sin \omega_0 t ; \quad (i = 1, 2, 3, 5, 6)$$

Pour une pulsation  $\omega_0$  de 2rd/s et une amplitude  $e_0$  de 0.5 rd (vitesse max de 1rd/s et accélération max de 2rd/s<sup>2</sup>), l'application des relations (2.21) (2.24) fait apparaître au niveau de la 4ième articulation un écart de l'ordre de 10 degrés correspondant à une accélération  $|\gamma_{p_i}|$  d'environ 20 rd/s<sup>2</sup>.

L'estimation au cours de cet essai, des écarts dus aux perturbations dynamiques au niveau des trois premières articulations montre que ceux-ci sont de l'ordre de 1° ( $|\gamma_{p_i}| \approx 2\text{rd/s}$ ) ; cet écart est d'environ 10° pour la 5ième articulation.

La simulation du système pour les entrées (2.25) fait apparaître au niveau des articulations  $q_4$  et  $q_5$  des écarts 10 fois plus importants que ceux qui apparaissent au niveau des trois premières articulations, comme l'illustre la figure 2.4.

En se plaçant dans les mêmes conditions que précédemment, le même phénomène a été observé sur le MA23, manipulateur notablement plus léger que le Robot vertical 80.

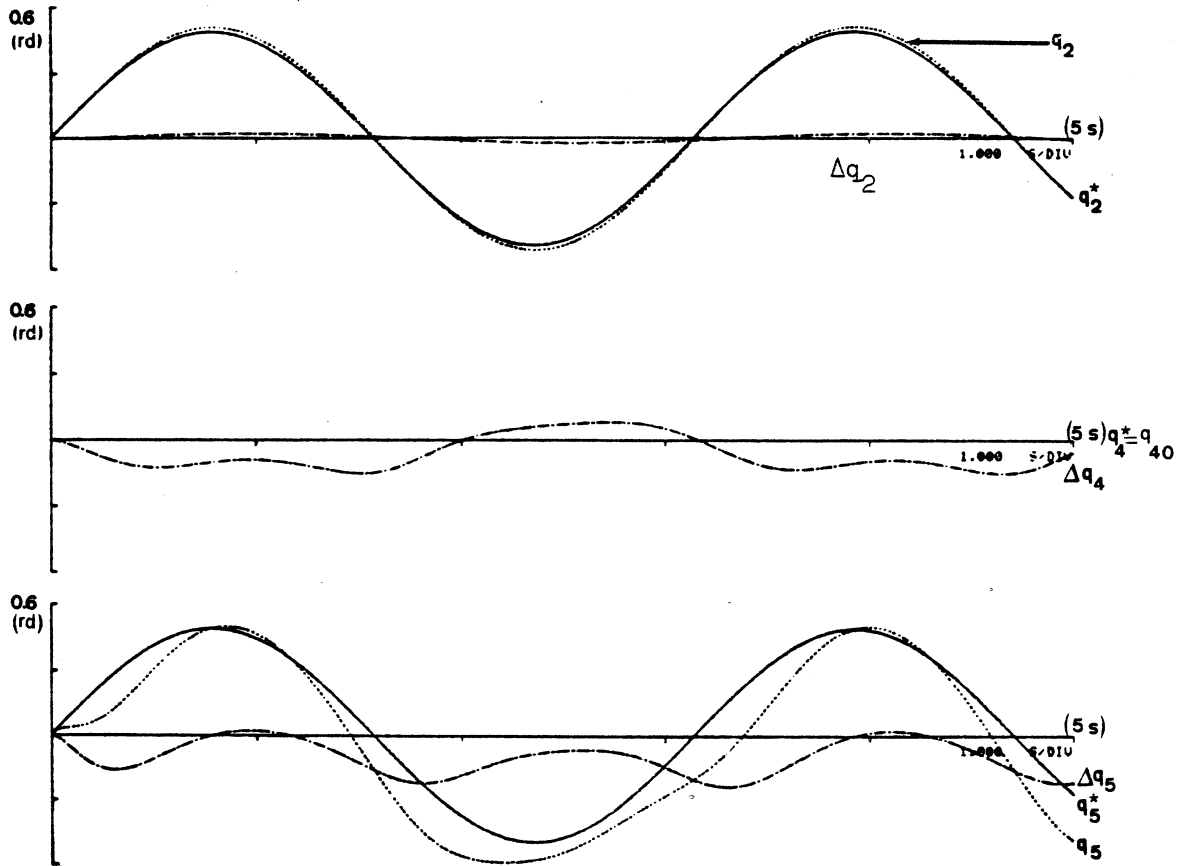
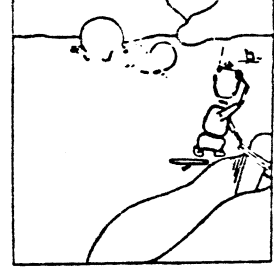
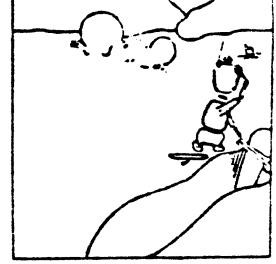


FIGURE 2.4 : Influence des perturbations  
(Robot Vertical 80)





## II.4 COMMANDE DYNAMIQUE

Dans ce mode de commande, la variation des paramètres dynamiques du système est considérée et les effets des forces perturbatrices, statiques (i.e. forces de pesanteur) ou dynamiques (i.e. forces de couplages inertiels forces centrifuges et de Coriolis) sont compensés.

Le point de départ dans la conception des systèmes de commande dynamique est le développement d'un niveau assurant le découplage des mouvements du système. Ainsi, l'on peut observer que les diverses techniques de commande utilisées sont appliquées sur le système découplé ou supposé comme tel.

Exclues par la nature itérative et non linéaire du système, les techniques de commande optimale bien adaptées quant aux tâches à configuration finale à atteindre, ont laissé la place à des solutions "sous optimales".

Le problème de la commande sous optimale en "temps minimal" a été étudié par M.E.Kahn [KAH69]. La solution proposée est basée sur la linéarisation des équations de mouvement et le découplage des commandes. Le mode "bang bang" est remplacé, au voisinage de l'état final, par une commande proportionnelle.

Outre les difficultés analytiques que soulève cette méthode, le domaine de validité des équations linéarisées du mouvement reste généralement fort limité.

Ces difficultés sont contournées en se posant le problème de la commande optimale non pas au niveau du système non linéaire, mais au niveau du système découplé. Cette démarche a été notamment suivie par G.N.Saridis

[SAR76, SAR77] dans la synthèse d'une commande sous-optimale minimisant un critère de performance lié à la cinématique et à la dynamique du système. Le problème auquel on est alors confronté est celui de la mise en oeuvre d'un système de commande assurant le "découplage des mouvements articulaires" (cf 2.4.1.).

Pour s'affranchir de ce problème, K.D.Young [YOU78] préconisa une approche basée sur la théorie des systèmes à structure variable (VSS) développée par V.I.Utkin [UTK71, UTK77]. Cette approche consiste à imposer au système un régime glissant de façon à le rendre insensible aux variations de paramètres et aux perturbations ; son principal avantage est de nécessiter qu'une connaissance grossière du modèle dynamique du système.

Cette insensibilité étant acquise au prix d'une sollicitation quasi-permanente des organes de puissance et de la structure mécanique, ce mode de commande (bang bang à haute fréquence) est en pratique, difficilement applicable aux systèmes mécaniques articulés.

#### 2.4.1 - DECOUPLAGE DES MOUVEMENTS ARTICULAIRES

Les premières structures des systèmes de commande dynamique ont été développées suivant un schéma très voisin de celui des systèmes classiques. En effet, l'hypothèse de faible interaction étant maintenue, le système de commande (cf figure 2.5) est réduit à s'opposer aux forces de pesanteur et à assurer la compensation des variations des inerties vues par les organes de puissance i.e. les éléments diagonaux de la matrice d'énergie cinétique [PAU72, MAR73]. Or, comme nous l'avons souligné au § II.3, les effets de la variation de l'inertie sur le maintien des performances restent le plus souvent peu significatifs devant ceux que provoquent les forces de couplage dynamiques :



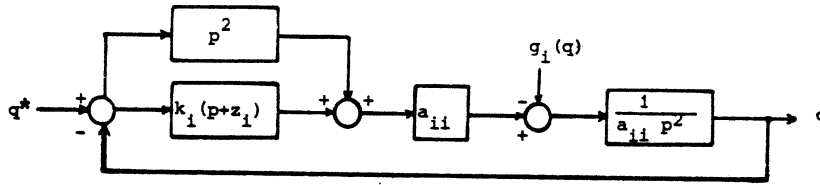
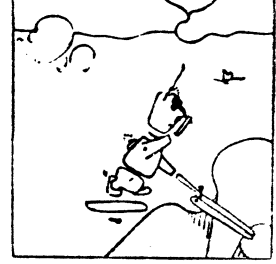


FIGURE 2.5 : Compensation des termes diagonaux de A(q)

Les mouvements articulaires du robot manipulateur sont régis par le système d'équations différentielles non linéaires (2.3). A partir de l'instant initial  $t_0$ , le système est représenté par :

$$\phi [Q(t) , \dot{Q}(t)] = \Gamma(t) ; Q(t_0) = Q_0 \quad (2.26)$$

où  $\phi(.)$  est la fonction vectorielle à n dimensions définie par :

$$\phi(.) \underline{\underline{ A [q(t)] \ddot{q}(t) + b [q(t) , \dot{q}(t)] - g [q(t)] }} \quad (2.27)$$

et où  $Q(t)$  est le vecteur d'état à 2n dimensions

$$Q(t) \underline{\underline{ [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t)]^T }} \quad (2.28)$$

Le mouvement du système est décrit par une équation de la forme :

$$Q(t) = \psi[Q(t) , \Gamma(t)] ; Q(t_0) = Q_0 \quad (2.29)$$

Soit  $q^*(t)$  l'évolution à partir de l'instant  $t_0$  correspondante à la tâche imposée au robot manipulateur. Le problème posé est celui de trouver

les commandes  $\Gamma(t)$  faisant évoluer le système (2.26) le long de la trajectoire  $Q^*(t)$ .

Une synthèse d'un système de commande répondant à ce problème a été effectuée par E.Freund [FRE76] en appliquant les techniques de découplage non linéaire [POR69 FRE75]. Dans le cas des systèmes considérés, l'intérêt principal de cette approche réside dans ce qu'elle représente comme caution pour la validité du système de commande qui en résulte. Car, par ailleurs, ce système de commande peut s'obtenir très simplement, en opérant directement sur l'équation matricielle (2.3) [KHAL78].

Dans un cadre plus général, A.V.Timofeev et Yu V.Ekalo [TIM76] ont résolu ce problème et démontré la validité de la solution obtenue.

Nous énonçons sans le démontrer le théorème [TIM76].

### Théorème 2.1

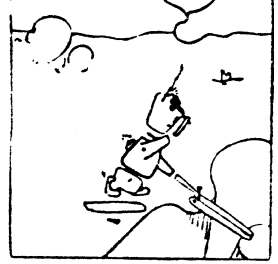
Soient  $\xi$  et  $K$  deux matrices de dimensions  $n \times n$  telles que la matrice :

$$M = \begin{vmatrix} 0_n & \vdots & \Pi_n \\ \hline -\xi & \vdots & -K \end{vmatrix}$$

de dimensions  $2n \times 2n$  soit Hurwitzienne (i.e. toutes ses valeurs propres à partie réelle négative). L'application au système (2.26) de la loi de commande :

$$\Gamma(t) = \phi \left[ Q(t), \dot{Q}^*(t) + M [Q(t) - Q^*(t)] \right] \quad (2.30)$$

assure la stabilité asymptotique de  $Q^*(t)$ . Il existe donc un instant  $t_\epsilon = T(\epsilon, M) > t_0$  à partir duquel l'inégalité ci-après est satisfaite :



$$|Q(t) - Q^*(t)| < \varepsilon, \forall t > t_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.31)$$

Pour un choix approprié des matrices  $\xi$  et  $K$ , l'écart  $(t_\varepsilon - t_0)$  peut être arbitrairement petit.

Le théorème précédent s'applique au cas où l'écart  $|Q(t_0) - Q^*(t_0)|$  est grand [PAV76]; c'est notamment le cas des tâches à configuration finale à atteindre.

Cette loi de commande permet de réaliser le découplage des mouvements articulaires et de leur imposer une dynamique linéaire. Distinguons les deux cas suivants :

i) évolution imposée : la loi de commande (2.30) s'écrit :

$$\Gamma(t) = A[q(t)]\Gamma_m(t) + b[q(t), \dot{q}(t)] - g[q(t)] \quad (2.32)$$

où

$$\Gamma_m(t) = \ddot{q}^*(t) - \xi[\dot{q}(t) - \dot{q}^*(t)] - K[q(t) - q^*(t)]$$

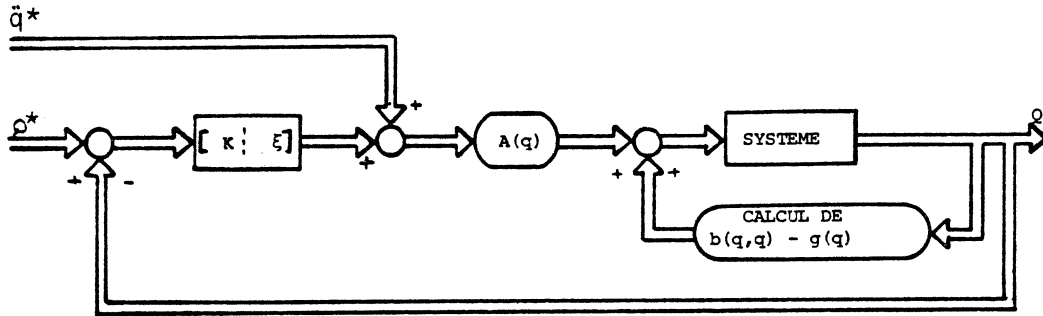
Le découplage des mouvements articulaires est réalisé en prenant  $\xi$  et  $K$  diagonales, la stabilité asymptotique est assurée dès que les éléments diagonaux de  $\xi$  et  $K$  sont positifs. Dans ces conditions  $A(q)$  étant définie positive, les écarts  $\varepsilon_q$  ( $\varepsilon_q(t) \triangleq |q(t) - q^*(t)|$ ) en boucle fermée sont régis par le système d'équations différentielles linéaires :

$$\ddot{\varepsilon}_q(t) + \xi \dot{\varepsilon}_q(t) + K \varepsilon_q = 0 \quad (2.33)$$

Le schéma bloc des asservissements est représenté sur la figure 2.6. :

---

(†) L'inégalité porte sur chacune des  $2n$  composantes.



**FIGURE 2.6** : Découplage des mouvements articulatoires pour une tâche à évolution imposée

L'application de la loi de commande (2.32) au robot vertical 80 placé dans les conditions de l'essai présenté au § 3.2 permet de réduire au voisinage de zéro les écarts entre les mouvements désirés et les mouvements suivis. Les enregistrements de la simulation présentés sur la figure 2.7 font apparaître une superposition quasi-parfaite de ces mouvements.

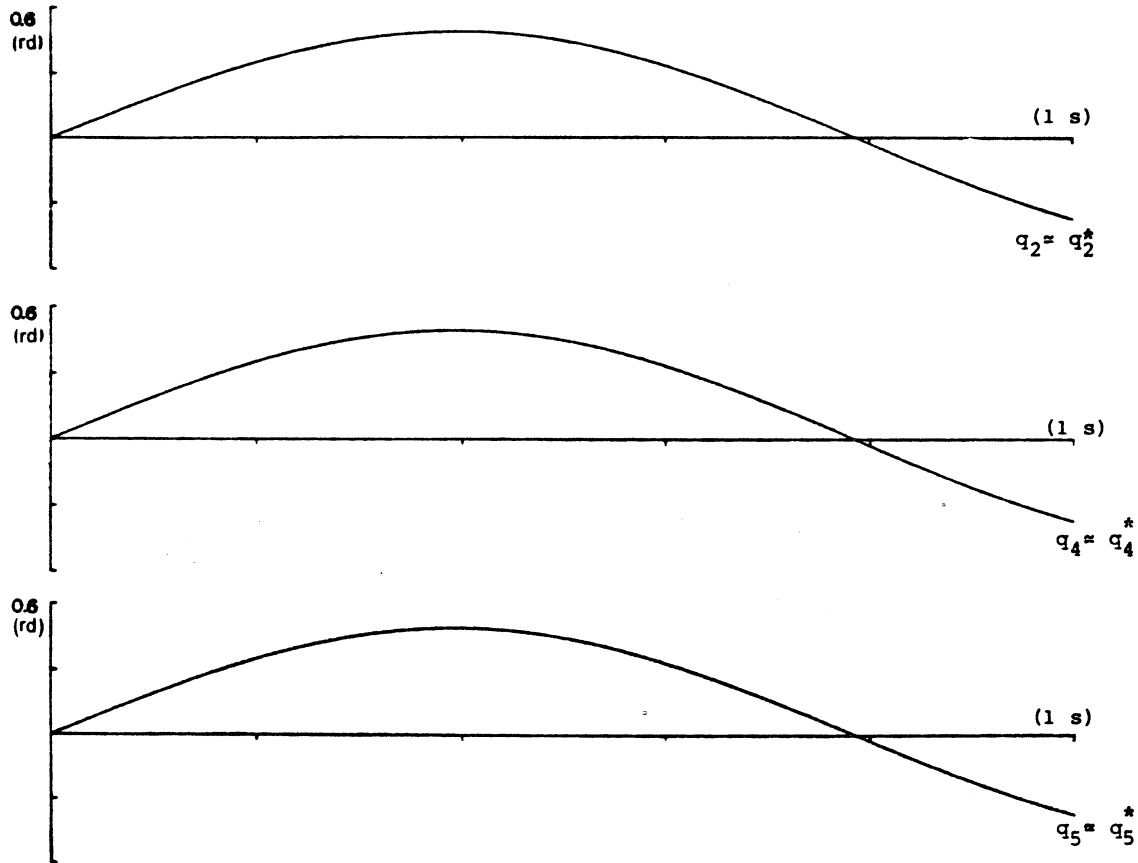
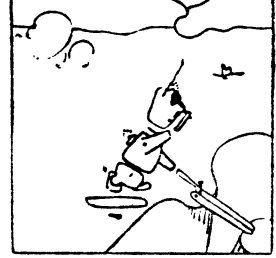


FIGURE 2.7 : Réponse à un essai harmonique du Robot Vertical 80 (commande dynamique)

ii) Configuration finale à atteindre : dans ce cas, la loi de commande (2.30) s'écrit :

$$\Gamma(t) = A[q(t)]\Gamma_m(t) + b[q(t), \dot{q}(t)] - g(q)$$

où

$$\Gamma_m(t) = -\xi \dot{q}(t) - K [q(t) - q^*(t)]$$

En boucle fermée, les mouvements articulaires sont régis par le système d'équations différentielles linéaires (cf figure 2.8)

$$\ddot{q}(t) + \xi \dot{q}(t) + K q(t) = K q^*$$

Le découplage des mouvements articulaires est réalisé lorsque les matrices  $\xi$  et  $K$  sont diagonales.

Notons que dans ce cas, il peut être intéressant de limiter les vitesses de déplacement. Ceci se fait en faisant apparaître, dans la loi de commande, des variables auxiliaires qui seront saturées aux valeurs maximales des vitesses données [KHA78]

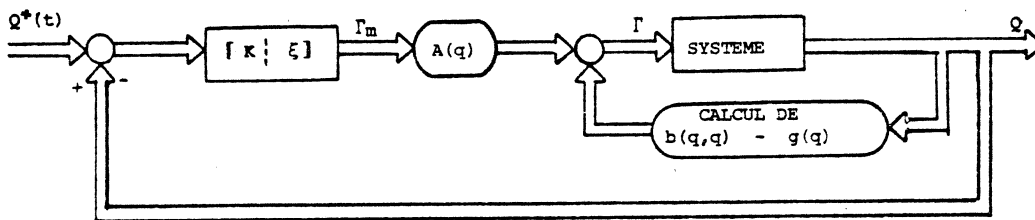
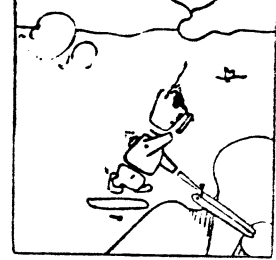


FIGURE 2.8 : Découplage des mouvements articulaires pour une tâche à configuration finale à atteindre



### 2.4.2 - SYSTEMES DE COMMANDE

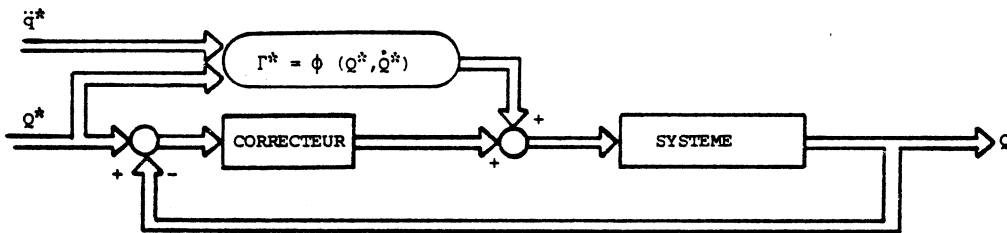
Développés à partir du modèle dynamique régissant les mouvements articulaires du robot manipulateur, les systèmes de commande sont conçus suivant une structure à deux niveaux destinés à assurer ;

- i) - la conversion dans l'espace des coordonnées généralisées des grandeurs définissant la tâche.
- ii) - le calcul des forces généralisées permettant de commander le système tout en s'opposant aux effets des forces statiques de pesanteur et à ceux des forces dynamiques de couplage.

La mise en oeuvre sur calculateur numérique des algorithmes correspondant à ces deux niveaux, en vue d'un fonctionnement en ligne, soulève de sérieuses difficultés temporelles. En effet, la résolution du problème de la conversion de la tâche et le calcul des différentes forces de compensation nécessitent, par le volume de calcul fort important qu'ils mettent en jeu, des moyens très puissants de calcul.

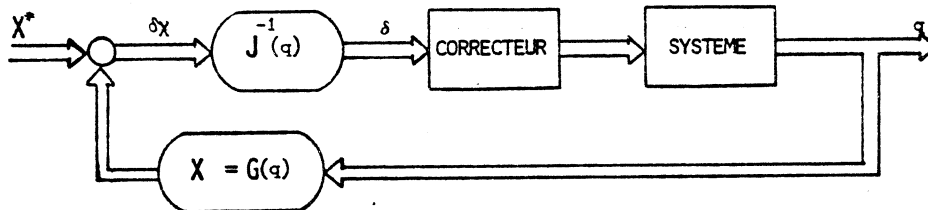
Lorsque l'évolution de la tâche est prédéterminée, la charge de calcul en temps réel du système de commande peut être considérablement réduite. Dans ce cas, en effet, l'évolution des coordonnées généralisées correspondante à la tâche imposée s'obtient aisément en opérant "hors ligne". La connaissance de cette évolution peut dès lors être mise à profit pour calculer la loi de commande en boucle ouverte correspondante à cette évolution i.e.

$\Gamma^* = \phi(Q^*, \dot{Q}^*)$ . L'application, à travers une chaîne d'anticipation, de cette loi de commande (cf figure 2.9) et l'insertion pour assurer la stabilité du système, d'un correcteur non-linéaire permet, tout en réduisant le nombre des calculs à effectuer en temps réel, de maintenir de bonnes performances de précision et de rapidité [LIE77, KHAL78 KHAL79].



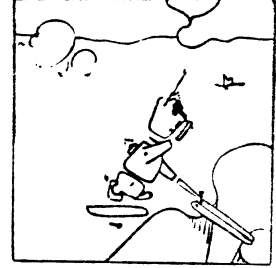
**FIGURE 2.9** : Commande dynamique avec une chaîne d'anticipation prédéterminée

Lorsque les tâches sont imposées en temps réel, les difficultés signalées restent entières. Ces difficultés ont conduit au niveau du problème de la conversion, à utiliser la structure du système de commande cinématique proposée par D.E.Whitney [WHI72] (cf figure 2.10) ou l'une de ses variantes; [VER78] quant au problème dynamique, nombre de solutions basées sur des simplifications du modèle dynamique [PAU72 BEJ74, SAR77] ou encore sur une linéarisation de celui-ci [YUA78] ont été proposées. Les performances du système sont alors d'autant plus dégradées que les vitesses, les accélérations et les amplitudes des mouvements sont élevées.



**FIGURE 2.10** : Commande cinématique





Une approche intéressante du problème des compensations dynamiques est celle qui consiste à mémoriser dans l'espace de configuration [RAI77, RAI78] les coefficients dynamiques des équations du mouvement, i.e. éléments des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$ ,  $C(q)$  et  $g(q)$

Examinons, en premier lieu, la manière dont les coefficients dynamiques dépendent des coordonnées généralisées.

### Propriété 2.1

"Les éléments des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C(q)$  sont indépendants de la première coordonnée généralisée. Ils le sont aussi vis à vis de la  $n$ ème coordonnée généralisée si celle-ci correspond à un mouvement rotatif autour de l'axe passant par le centre de masse du corps  $C_n$  et du point de sa liaison avec le corps antécédent"

En effet, l'énergie cinétique mise en jeu lors de l'évolution d'une coordonnée  $q_i$  ne dépend que de la configuration dans le repère lié au corps  $C_i$ , des corps situés en aval de l'articulation ( $i$ ); les coordonnées  $q_1$  et  $q_n$  n'apparaîtront donc pas dans les coefficients  $a_{ij}$  des termes  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  de la forme quadratique de l'énergie cinétique (cf relation 2.1.). Il suffit en ce qui concerne les matrices  $B(q)$  et  $C(q)$  d'examiner les relations (2.5) et (2.9).

Notons que les conditions concernant l'indépendance vis à vis de  $q_n$  sont remplies par la quasi-totalité des systèmes dotés d'organe terminal.

Lorsque ces dernières conditions sont satisfaites, la matrice  $g(q)$  des forces de pesanteur est indépendante de  $q_n$ ; son indépendance de  $q_1$  n'est cependant obtenue que lorsque l'axe du mouvement de cette articulation est vertical. Nous reviendrons sur cette question au chapitre III.

Proposée par M.H.Raibert [RAI77, RAI78] l'approche qui consiste à

mémoriser les coefficients dynamiques a été utilisée pour la commande du Stanford Scheinman arm, manipulateur possédant six degrés de liberté (cf figure 2.11). Cette mémorisation est effectuée dans un espace quantifié à quatre dimensions. En utilisant huit niveaux de quantification, la mémorisation des 60 coefficients dynamiques que font intervenir les équations du mouvement de ce manipulateur, requiert 250 K mots (12 ou 16 bits). Ce chiffre est très élevé pour les calculateurs numériques actuellement utilisés. Dans le chapitre III, un éventail de solutions correspondant à divers compromis "temps de calcul-place mémoire" est proposé.

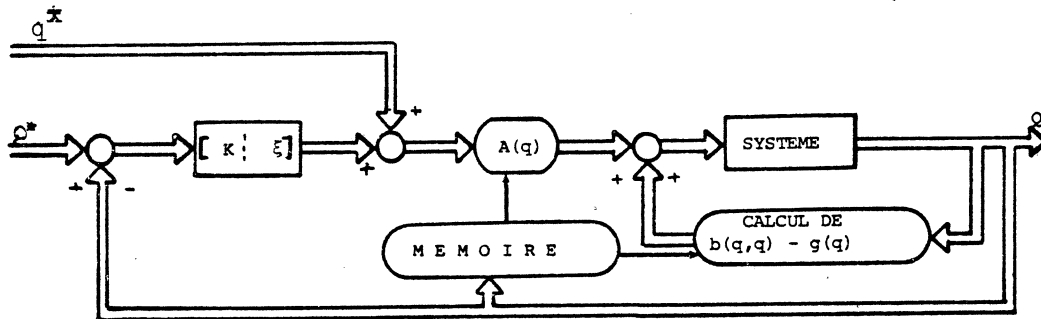
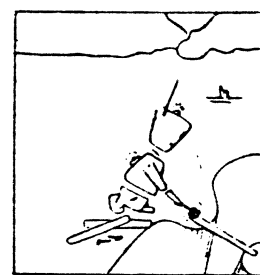


FIGURE 2.11 : Mémorisation des coefficients dynamiques pour le découplage des mouvements articulaires.



## II.5 - CONCLUSION

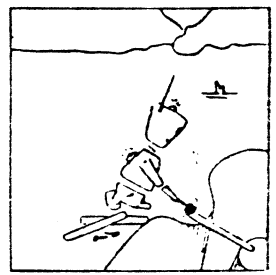
L'analyse, à l'aide des équations de mouvement, du comportement dynamique des robots manipulateurs a de nouveau confirmé l'inaptitude des techniques classiques de la commande à assurer le maintien des performances imposées lorsque les mouvements du système sont rapides.

Le principal apport de cette analyse réside toutefois dans ses conclusions concernant l'influence des forces dynamiques au niveau des derniers corps de la chaîne articulée. Il a été démontré, en effet, que les simplifications généralement pratiquées à ce niveau ne sont nullement justifiées. Nous avons vu que les effets de ces forces dépassent en fait, et de loin, ceux qui se manifestent au niveau des premières articulations du système.

Après avoir présenté l'approche du découplage des mouvements articulaires, nous avons soulevé le problème de la mise en oeuvre et souligné les difficultés qui résultent, lors de la commande en temps réel, de la conjugaison du problème de la conversion de la tâche et de celui posé par les compensations des forces dynamiques.

Basés sur l'approche du découplage des mouvements articulaires, les différents systèmes de commande que nous avons présenté laissent subsister les difficultés temporelles relatives au problème de la conversion de la tâche lorsque cette dernière est imposée *en ligne*.

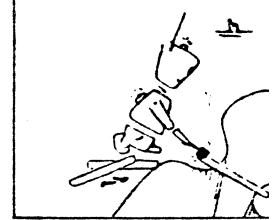




## CHAPITRE III

### SYNTHÈSE DE COMMANDE DYNAMIQUE DANS L'ESPACE OPERATIONNEL





### III.1 - INTRODUCTION

Etroitement lié à la tâche, l'organe terminal est au centre du problème de la commande des robots manipulateurs. La principale mission du système de commande est, en fait, de faire en sorte que les mouvements de cet organe et les forces et/ou les couples qu'il exerce sur l'environnement "suivent" au mieux l'évolution désirée de la tâche. Ceci, tout en assurant la stabilité globale du système et tout en respectant les contraintes auxquelles celui-ci est soumis.

Se pose alors la question de savoir si l'approche qui consiste à développer le système de commande selon une structure à deux niveaux assurant successivement la transformation des coordonnées de la tâche et l'asservissement aux mouvements articulaires obtenus, permet de remplir *au mieux* cette mission.

Ce chapitre apporte une réponse à cette interrogation et présente une approche nouvelle du problème de la commande.

Après avoir élaboré, dans le cas des systèmes non redondants, le modèle dynamique qui régit les mouvements de l'organe terminal dans l'espace opérationnel, une nouvelle structure du système de commande assurant le découplage de ces mouvements est proposée.

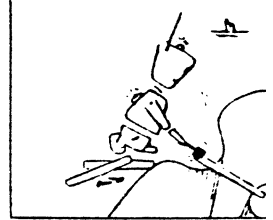
Les difficultés soulevées par la mise en oeuvre de ce système de commande sont considérablement réduites grâce à la mise en évidence d'un grand nombre de propriétés fondamentales concernant les variations des coefficients

dynamiques intervenant dans la commande. Ces résultats sont obtenus en considérant les deux systèmes de coordonnées opérationnelles utilisant les angles d'Euler et les P.O.R. (cf Chapitre I).

Une seconde réduction du problème de la mise en oeuvre est obtenue en utilisant les techniques d'approximation multivariable et grâce à une importante propriété dynamique comme nous le verrons au § 3.5.

Cette approche de la commande est étendue par la suite aux différentes représentations de l'orientation présentées dans le premier chapitre et au cas général des structures mécaniques redondantes.





### III.2 - MODELE DYNAMIQUE DE L'EFFECTEUR

Les mouvements, dans l'espace des coordonnées généralisées, d'un système mécanique articulé sont régis, comme nous l'avons vu au § 2.2, par l'équation matricielle :

$$A(q) \ddot{q} + b(q, \dot{q}) - g(q) = \Gamma \quad (3.1)$$

avec

$$b(q, \dot{q}) = B(q) |\dot{q} \dot{q}| + C(q) |\dot{q}^2|$$

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux équations de mouvement de l'organe terminal. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cas des *systèmes non redondants* et nous choisissons, pour décrire la configuration de l'organe terminal, des paramètres indépendants, i.e. des *coordonnées opérationnelles*.

Le modèle géométrique du système exprimant les  $m_0$  coordonnées opérationnelles en fonction de  $n$  coordonnées généralisées (avec  $n = m_0$  vue l'hypothèse de non redondance), est représenté par l'équation :

$$\chi = G(q) \quad (3.2)$$

A l'aide de la matrice jacobienne de dimension  $m_0 \times n$ , le modèle cinématique s'écrit :

$$\dot{\chi} = J(q) \dot{q} \quad (3.3)$$

Les débattements des coordonnées généralisées étant limités, ces coordonnées sont soumises à des contraintes de la forme :

$$\underline{q}_i < q_i < \bar{q}_i \quad 1 < i < n \quad (3.4)$$

Le point de coordonnées  $q$ , figuratif d'une configuration du système, évolue dans l'hyper-parallélépipède  $\mathcal{D}_q$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$  des coordonnées généralisées, où :

$$\mathcal{D}_q \triangleq \prod_{i=1}^n \left[ \underline{q}_i, \bar{q}_i \right] \quad (3.5)$$

Le domaine  $\mathcal{D}_x$  de l'espace opérationnel  $\mathbb{R}^{m_0}$  à l'intérieur duquel évolue le point de coordonnées  $x$  est défini d'après (3.3) et (3.5) par :

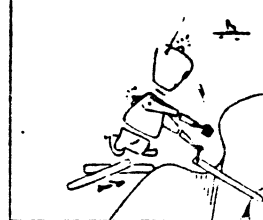
$$\mathcal{D}_x = G (\mathcal{D}_q) \quad (3.6)$$

Considérons à l'intérieur de  $\mathcal{D}_q$  un domaine  $\mathcal{D}_q^+$  excluant toute singularité au niveau du modèle cinématique (3.3) et tel que la fonction vectorielle  $G$  soit bijective. Désignons par  $\mathcal{D}_x^+$  le domaine :

$$\mathcal{D}_x^+ = G (\mathcal{D}_q^+) \quad (3.7)$$

Dans  $\mathcal{D}_x^+$  les paramètres indépendants  $x_1, x_2, \dots, x_{m_0}$  qui sont en nombre égal au nombre des degrés de liberté du système, forment un ensemble de coordonnées généralisées.

Les équations décrivant les mouvements dans le domaine  $\mathcal{D}_x^+$  de l'organe terminal s'obtiennent en écrivant les équations de Lagrange par rapport aux



coordonnées et aux vitesses opérationnelles.

Le système étant supposé à liaisons indépendantes du temps, son énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses généralisées. En désignant par  $\Lambda(X)$  la matrice symétrique de la forme quadratique de l'énergie cinétique exprimée en fonction des coordonnées et des vitesses opérationnelles l'énergie cinétique du système s'écrit :

$$2 T_x (X, \dot{X}) = \dot{X}^T \Lambda (X) \dot{X} \quad (3.8)$$

Comme  $A(q)$ , la matrice  $\Lambda(X)$  est définie positive, elle est de dimension  $m_0 \times m_0$ .

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = F_i \quad ; \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.9)$$

où le lagrangien  $\mathcal{L}(X, \dot{X})$  est donné par :

$$\mathcal{L}(X, \dot{X}) = T_x (X, \dot{X}) - U (X) \quad (3.10)$$

dans lequel  $U(X)$  représente l'énergie potentielle due à la pesanteur et où  $F_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  force opérationnelle.

Désignons par  $m(X, \dot{X})$ , la matrice colonne définie par :

$$m(X, \dot{X}) \triangleq \frac{\partial}{\partial X} \left[ T_x (X, \dot{X}) \right] = \left[ \frac{\partial T_x}{\partial x_1} \quad \frac{\partial T_x}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial T_x}{\partial x_{m_0}} \right]^T \quad (3.11)$$

Le  $i^{\text{ème}}$  élément  $m_i$  de  $m(X, \dot{X})$  s'écrit :

$$m_i \triangleq \frac{1}{2} \dot{X}^T \Lambda_{x_i}(X) \dot{X} ; \quad (1 \leq i \leq m_0) \quad (3.11\text{bis})$$

où  $(x_i)$  dénote la dérivée partielle par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée opérationnelle.

Le développement des équations de Lagrange (8.9) fait apparaître l'expression  $\dot{\Lambda}(X)\dot{X}$  que nous regroupons avec  $m(X, \dot{X})$  dans la matrice colonne :

$$\mu(X, \dot{X}) \triangleq \dot{\Lambda}(X) \dot{X} - m(X, \dot{X}) \quad (3.12)$$

et soit

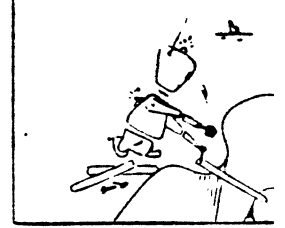
$$p(X) \triangleq \frac{\partial}{\partial X} [U(X)] = \left[ \frac{\partial U(X)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial U(X)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial U(X)}{\partial x_{m_0}} \right]^T \quad (3.13)$$

A l'aide de ces quantités, le modèle dynamique régissant les mouvements de l'organe terminal d'un système non redondant évoluant à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}_x^+$  est donné par l'équation matricielle :

$$\Lambda(X) \ddot{X} + \mu(X, \dot{X}) - p(X) = F \quad (3.14)$$

où  $\Lambda(X)$ ,  $\mu(X, \dot{X})$  et  $p(X)$  représentent, respectivement, la matrice d'énergie cinétique de dimension  $n \times n$ , la matrice colonne des forces centrifuges et de Coriolis et la matrice colonne des forces dues à la pesanteur,  $F$  étant la matrice des  $n$  forces opérationnelles.

L'application des forces opérationnelles  $F$  se fait par les moyens d'action sur le système à savoir par ses organes de puissance agissant au niveau de ses articulations.



La relation entre  $F$  et les forces généralisées  $\Gamma$  s'établit en exprimant en vertu du principe des travaux virtuels l'identité entre le travail de  $F$  dans un déplacement élémentaire  $\delta X$  et le travail de  $\Gamma$  dans le déplacement correspondant  $\delta q$  soit [NEV73]

$$\Gamma = J^T(q) F \quad (3.15)$$

*Obtention des éléments du modèle dynamique (3.14)*

L'examen des équations définissant les différentes matrices intervenant dans le modèle dynamique (3.14) montre que la détermination des expressions analytiques des éléments de ces matrices ne peut être réalisée qu'en passant par l'intermédiaire des paramètres naturels de configuration qui sont les  $n$  coordonnées généralisées  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Il apparaît dès lors intéressant d'exprimer ces quantités en fonction des éléments connus du modèle dynamique (3.1).

En exprimant l'identité entre les deux formes quadratiques de l'énergie cinétique  $T_x(X, \dot{X})$  et  $T_q(q, \dot{q})$  données, respectivement par les relations (3.8) et (2.1) et en utilisant le modèle cinématique (3.3), il est aisé d'établir que :

$$A(q) = J^T(q) \Lambda(X) J(q) \quad (3.16)$$

La régularité de la matrice jacobienne étant assurée dans le domaine  $\mathcal{D}_q^+$ , la matrice  $\Lambda(X)$  satisfait l'équation :

$$\Lambda(X) = J^{-T}(q) A(q) J^{-1}(q) \quad (3.17)$$

Par abus de notation, nous désignerons indifféremment par  $\Lambda$  la matrice du premier membre et la matrice du produit du second membre de l'équation (3.17) elles seront, respectivement notées  $\Lambda(\chi)$  et  $\Lambda(q)$ .

Le développement des quantités intervenant dans la relation (3.12) permet, en utilisant (3.17), d'obtenir :

$$\dot{\Lambda}(\chi) \dot{\chi} = J^{-T}(q) \dot{A}(q) \dot{q} + \Lambda(q) h(q, \dot{q}) + \dot{J}^{-T}(q) A(q) \dot{q} \quad (3.18)$$

$$m(\chi, \dot{\chi}) = J^{-T}(q) l(q, \dot{q}) + \dot{J}^{-T}(q) A(q) \dot{q} \quad (3.19)$$

où  $h(q, \dot{q})$  est la matrice colonne définie par :

$$h(q, \dot{q}) \triangleq \dot{J}(q) \dot{q} \quad (3.20)$$

l'élément  $l_i$  de la matrice colonne  $l(q, \dot{q})$  s'écrit :

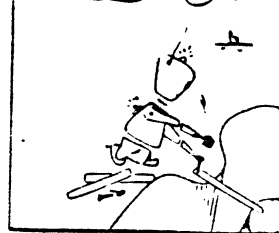
$$l_i \triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T A_{q_i}(q) \dot{q} ; (1 \leq i \leq n) \quad (3.21)$$

l'indice  $(q_i)$  dénote la dérivée partielle par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée généralisée.

La matrice colonne  $\mu(X, \dot{X})$  de la relation (3.12) s'écrit

$$\mu(X, \dot{X}) = J^{-T}(q) \left[ \dot{A}(q) \dot{q} - l(q, \dot{q}) \right] - \Lambda(q) h(q, \dot{q}) \quad (3.22)$$

La quantité entre crochets dans l'expression de  $\mu(X, \dot{X})$  n'est autre que la matrice colonne  $b(q, \dot{q})$  des forces centrifuges et de Coriolis du modèle dynamique (3.1) ; d'où



$$\mu(X, \dot{X}) = J^{-T}(q) b(q, \dot{q}) - \Lambda(q) h(q, \dot{q}) \quad (3.23)$$

La matrice des forces dues à la pesanteur s'obtient aisément à partir de  $g(q)$  en utilisant la matrice jacobienne, elle s'écrit :

$$p(X) = J^{-T}(q) g(q) \quad (3.24)$$

Le calcul des matrices  $\Lambda$ ,  $\mu$  et  $p$ , à partir des expressions (3.17) (3.23) et (3.24) dans lesquelles la configuration  $q$  correspond à la configuration réelle du système, permet d'étendre le domaine  $\mathcal{D}_x^+$  de validité du modèle dynamique (3.14) au domaine  $\mathcal{D}_x^*$  défini par :

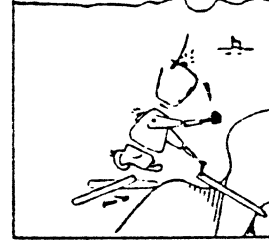
$$\mathcal{D}_x^* = G(\mathcal{D}_q^*) \quad (3.25)$$

où  $\mathcal{D}_q$  est le domaine obtenu à partir de  $\mathcal{D}_q$  (3.5) en excluant toute configuration singulière au niveau du modèle cinématique.

Dans ce cas, en effet, les coefficients dynamiques correspondant à une configuration du système sont obtenus directement à partir de la donnée de  $q$ . La restriction à un domaine où  $G$  est bijective devient dès lors non nécessaire.







### III.3 - DECOUPLAGE DES MOUVEMENTS DE L'EFFECTEUR

Les mouvements, dans l'espace opérationnel, de l'organe terminal sont régis par le système non linéaire d'équations différentielles (3.14) que nous venons de préciser.

En procédant de la même manière qu'au § 2.4.1., lors du découplage des mouvements articulaires, la loi de commande en termes de forces opérationnelles s'écrit :

$$F(t) = \Lambda(X) F_m + \mu(X, \dot{X}) - p(X) \quad (3.26)$$

où  $F_m$  représente l'entrée du système découplé. Selon que la tâche est un mouvement imposé  $X^*(t)$  ou une configuration finale à atteindre  $X^*$ ,  $F_m$  aura lorsqu'on désire imposer une dynamique linéaire, l'une des deux formes :

$$F_m(t) = \ddot{X}^*(t) - \xi [\dot{X}(t) - \dot{X}^*(t)] - K [X(t) - X^*(t)] \quad (3.27)$$

$$F_m(t) = -\xi \dot{X}(t) - K [X(t) - X^*] \quad (3.28)$$

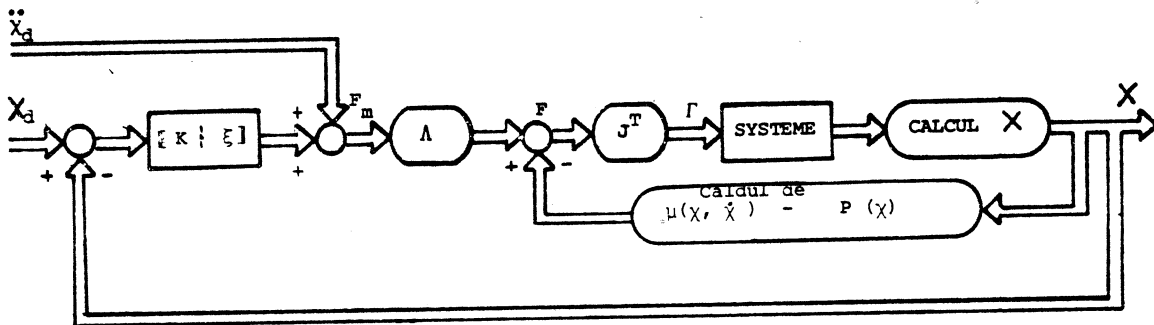
où  $\xi$  et  $K$  sont deux matrices diagonales à éléments positifs dont le choix permet de fixer la dynamique désirée.

L'application des forces opérationnelles  $F(t)$  se fait d'après (3.15) en imposant les forces généralisées :

$$\Gamma(t) = J^T [q(t)] F(t) \quad (3.29)$$

Dans le cas d'un mouvement imposé (cf figure 3.1), l'évolution dans le temps de l'écart  $\epsilon_X(t) = X(t) - X^*(t)$  est décrite par l'équation linéaire découplée

$$\ddot{\epsilon}_X(t) + \xi \dot{\epsilon}_X(t) + K \epsilon_X(t) = 0 \quad (3.30)$$



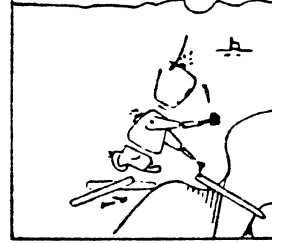
$$X \triangleq \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}^T$$

FIGURE 3.1

Découplage des mouvements de l'organe terminal

Le système en boucle fermée, lorsque la tâche est une configuration finale à atteindre, est régi par l'équation linéaire découplée :

$$\ddot{X}(t) + \xi \dot{X}(t) + K X(t) = K X^* \quad (3.31)$$



L'application dans ces deux cas des forces opérationnelles  $F(t)$  (cf rel. 3.26) se fait d'après (3.23), (3.24), (3.26) et (3.29) en imposant la loi de commande en force généralisée :

$$\Gamma(q) = J^T(q) \Lambda(q) F_m(q) + \tilde{b}(q, \dot{q}) - g(q) \quad (3.32)$$

avec

$$\tilde{b}(q, \dot{q}) \triangleq J^T(q) \mu(q, \dot{q}) = b(q, \dot{q}) - J^T(q) \Lambda(q) h(q, \dot{q}) \quad (3.33)$$

$F_m(t)$  étant l'entrée du système découplé (cf rel. 3.23 et 3.28).

### 3.3.1 - STRUCTURE CLASSIQUE DU SYSTEME DE COMMANDE

La loi de commande (3.32) peut à l'aide des relations (3.1), (3.17) et (3.20) être développée et mise sous la forme (cf figure 3.2)

$$\Gamma(t) = A(q) J^{-1}(q) [F_m(t) - \dot{J}(q) \dot{q}] + B(q) [\dot{q} \dot{q}] + C(q) [\dot{q}^2] - g(q) \quad (3.34)$$

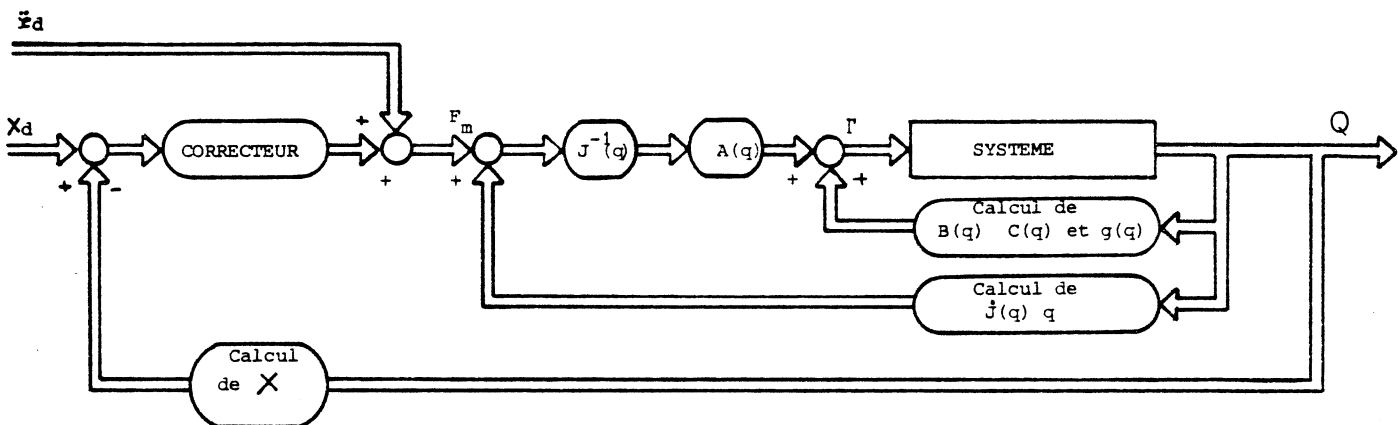


FIGURE 3.2 : Structure classique d'un système de commande assurant le découplage des mouvements de l'organe terminal

Or, sous cette forme, la loi de commande (3.34) aurait pu être directement obtenue à partir du modèle dynamique (3.1) en utilisant la relation résultant de la dérivation par rapport au temps du modèle cinématique, relation qui s'écrit :

$$\ddot{\chi} = J(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) \quad (3.35)$$

avec

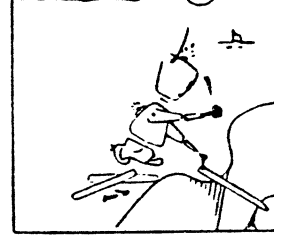
$$h(q, \dot{q}) \triangleq \dot{J}(q) \dot{q}$$

Présentée dans nombre de travaux, notamment [KHA78, ZAB78, HEW78, REN79, PAU79, LUH80] la loi de commande (3.34) soulève l'ensemble des difficultés résultant de la conjugaison du problème de la conversion de la tâche et du problème dynamique.

En effet, la mise en oeuvre de cette loi de commande nécessite à chaque pas de calcul, la détermination des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $g(q)$  l'inversion de la matrice jacobienne, le calcul de sa dérivée par rapport au temps et fait appel à un nombre important d'opérations vectorielles.

On est dès lors amené, selon les performances recherchées, à préconiser soit une simplification des coefficients dynamiques intervenant dans cette loi, soit une mémorisation de ceux-ci. Or, si l'on remarque que ces coefficients se rattachent à la dynamique des mouvement articulaires, on constate la difficulté qu'il y a à évaluer l'influence de leur simplification ou de la quantification des variables dont ils dépendent, sur le comportement dynamique de l'organe terminal.

Ces simplifications ou cette mémorisation laissent, d'autre part, le problème de la conversion de la tâche entièrement posé.



### 3.3.2 - NOUVELLE STRUCTURE DU SYSTEME DE COMMANDE

La modélisation dans l'espace opérationnel nous a permis de mettre en évidence les composantes fondamentales du modèle dynamique régissant les mouvements de l'organe terminal : l'inertie ou la masse inertielle que présente le mouvement de l'organe terminal suivant le  $i^{\text{ème}}$  axe de coordonnée opérationnelle est donnée par l'élément diagonal  $\lambda_{ii}$  de la matrice d'énergie cinétique  $\Lambda(q)$ , les éléments  $\lambda_{ij}$  ( $i \neq j$ ) de cette matrice représentent comme ceux de la matrice  $A(q)$ , i.e.  $a_{ij}$  ( $i \neq j$ ) les coefficients des couplages inertiels entre les différents mouvements de l'espace opérationnel et, les forces centrifuges et de Coriolis générées par ces mouvements sont données par  $\mu(q, \dot{q})$ .

Exprimée en fonction de ces grandeurs, la loi de commande en force généralisée (3.32) se présente sous une forme qui se prête à toute analyse concernant la dynamique de l'organe terminal.

Toutefois, compte tenu de la complexité des éléments que cette loi de commande fait apparaître, se pose la question de l'apport qu'elle peut avoir au niveau du problème de la mise en oeuvre.

Il est évident que la complexité de ces éléments n'est pas de nature à apporter une simplification au problème de la mise en oeuvre, si celui-ci était posé en termes de calcul direct des éléments intervenant dans la loi de commande.

Il en est tout autrement, lorsque d'autres approches telle que la mémorisation des coefficients dynamiques de la commande sont envisagées comme nous le verrons au cours de ce chapitre. Examinons tout d'abord la structure de cette loi de commande.

En remarquant que les deux termes matriciels de l'expression (3.33) à laquelle conduit la transposition dans l'espace des coordonnées généralisées des forces centrifuges et de Coriolis  $\mu(q, \dot{q})$ , sont de même nature, nous développons  $\hat{b}(q, \dot{q})$  comme cela a été fait pour  $b(q, \dot{q})$  (cf § II.2) sous la forme :

$$\tilde{b}(q, \dot{q}) = \tilde{B}(q) [\dot{q} \dot{q}] + \tilde{C}(q) [\dot{q}^2] \quad (3.36)$$

$\tilde{b}(q)$  et  $C(q)$  de dimensions respectives  $n \times n(n-1)/2$  et  $n \times n$ , sont, d'après (3.1) et (3.33) données par :

$$\tilde{B}(q) \triangleq B(q) - J^T(q) \Lambda(q) H_1(q) \quad (3.36\text{bis})$$

et

$$\tilde{C}(q) \triangleq C(q) - J^T(q) \Lambda(q) H_2(q)$$

où  $H_1(q)$  et  $H_2(q)$  de dimensions respectives  $n \times n(n-1)/2$  et  $n \times n$ , sont définies par

$$h(q, \dot{q}) \triangleq H_1(q) [\dot{q} \dot{q}] + H_2(q) [\dot{q}^2] \quad (3.37)$$

La loi de commande (3.32) s'écrit (cf figure 3.3) :

$$\Gamma(t) = J^T(q) \Lambda(q) F_m + \tilde{B}(q) [\dot{q} \dot{q}] + \tilde{C}(q) [\dot{q}^2] - g(q) \quad (3.38)$$

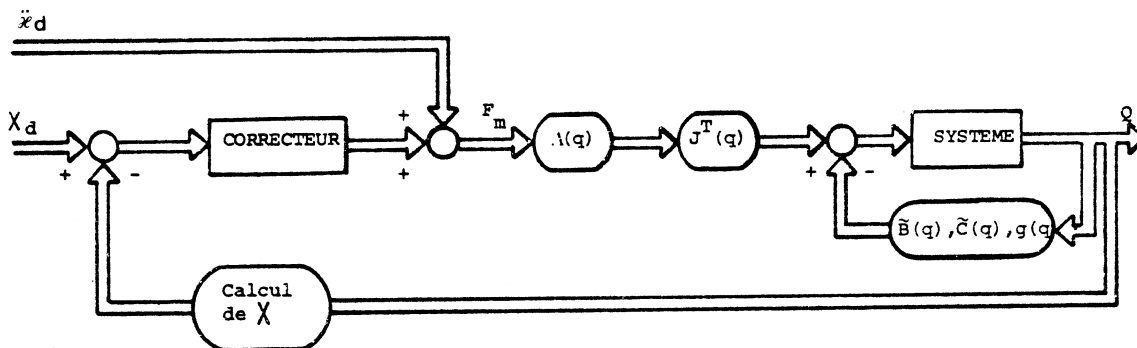
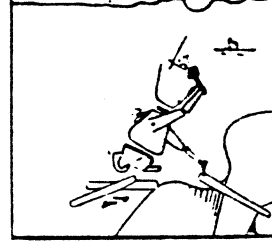


FIGURE 3.3 :

Découplage utilisant  $\Lambda(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$ ,  $\tilde{C}(q)$  et  $g(q)$



$\tilde{C}(q)$  et  $\tilde{B}(q)$  que fait apparaître ce système de commande représentent les matrices des forces (généralisées) correspondantes aux forces (opérationnelles) centrifuges et de Coriolis qui engendrent les mouvements de l'organe terminal.

### 3.3.3 - PROBLEME DE LA MISE EN OEUVRE

La mise sous la forme (3.38) de la loi de commande conduit naturellement à la rapprocher de celle qui assure le découplage des mouvements articulaires (cf § 2.4.1) et à envisager la mémorisation des matrices  $\Lambda(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$  et  $\tilde{C}(q)$  à la place des trois matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C(q)$ .

En effet, si la place mémoire requise dans ces deux cas était comparable, ce procédé se traduirait par la suppression de la lourde charge que représente le problème de l'inversion de la tâche.

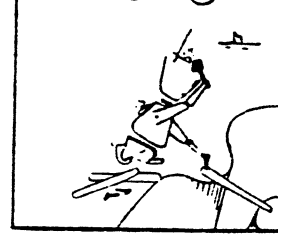
De dimensions identiques à celles de  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C(q)$ , les matrices  $\Lambda(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$  et  $\tilde{C}(q)$  s'expriment suivant le choix du modèle géométrique en fonction de  $(n-1)$  ou de  $n$  coordonnées généralisées. Rappelons que les éléments des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C(q)$  sont fonction de  $(n-2)$  coordonnées généralisées (cf propriété 2.1).

En se plaçant dans les mêmes conditions de la mémorisation des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$ ,  $C(q)$  et  $g(q)$  effectuée par M.H.Raibert [RAI77] la mise en mémoire des matrices  $\Lambda(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$ ,  $\tilde{C}(q)$  et  $g(q)$  nécessiterait suivant le cas une place mémoire d'environ 2000 K mots ou 16 000K mots.

Rappelons que 250 K mots ont été requis pour les matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$ ,  $C(q)$  et  $g(q)$ , nombre dont nous avons noté l'importance quant aux calculateurs numériques actuellement utilisés.

Comme nous allons le voir, ces difficultés ont pu être aplanies grâce à certaines propriétés que nous avons dégagées de l'étude des différentes matrices intervenant dans la loi de commande (3.38).





### III.4 - PROPRIETES DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES

Dans ce paragraphe, sont présentées et démontrées les propriétés qui nous permettront d'envisager différentes structures de systèmes de commande susceptibles d'assurer, en temps réel, le découplage des mouvements de l'organe terminal.

Les deux systèmes de coordonnées opérationnelles que nous avons présenté au chapitre premier, seront considérés (i.e.  $G_E(q)$  et  $G_{OR}(q)$ ) l'extension aux autres systèmes de coordonnées est réalisée au paragraphe III.6.

Nous allons tout d'abord examiner le problème signalé au § 2.4.1 concernant le vecteur  $g(q)$  des forces dues à la pesanteur.

#### 3.4.1 - PROPRIETES DU VECTEUR $g(q)$

Le repère de référence  $\mathcal{R}_0$  a été fixé (cf § 1.3.1) de façon à diriger son vecteur unitaire  $i^0$  perpendiculairement à la verticale ascendante.

Pour calculer l'énergie potentielle due à la pesanteur, considérons le repère  $\mathcal{R}_a \triangleq (\mathcal{O}_a, i^a, j^a, k^a)$  obtenu à partir de  $\mathcal{R}_0$  par une rotation autour de  $i^0$  d'un angle  $(-\eta)$  de telle sorte que le vecteur unitaire  $k^a$  soit dirigé selon la verticale ascendante (cf figure 3.4)

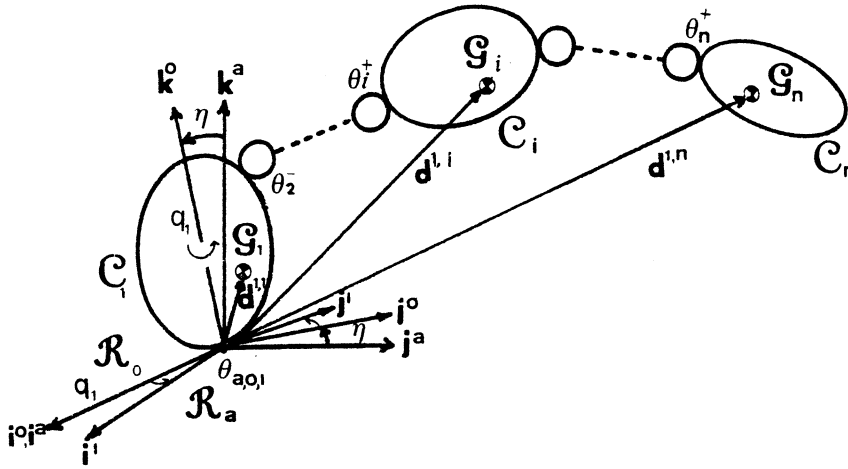


FIGURE 3.4 : Définition de  $\mathcal{R}_a$ ,  $d^{1i}$  et  $\mathcal{G}_i$

Désignons par  $m_i$  la masse du corps  $C_i$  et par  $h_i$  la côte dans le repère  $\mathcal{R}_a$ , de son centre de masse  $\mathcal{G}_i$ . L'énergie potentielle due à la pesanteur s'écrit :

$$V = g_0 \sum_i m_i h_i + V_0 \quad (3.39)$$

où  $g_0$  représente l'accélération de la pesanteur et où  $V_0$  est une constante.

Introduisons les  $n$  vecteurs  $d^{1i}$  définis par (cf figure 3.4) :

$$d^{1i} \triangleq \mathcal{O}_1^+ \xrightarrow{\quad} \mathcal{G}_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.40)$$

L'organe terminal i.e. le corps  $C_n$ , étant supposé animé d'un mouvement rotatif autour d'un axe passant par son centre de masse, l'on peut aisément démontrer que les composantes dans le repère  $\mathcal{R}_1$  des  $n$  vecteurs  $d^{1i}$  sont indépendantes de la première et de la  $n^{\text{ième}}$  coordonnée généralisée. D'où

$$d^{1i(1)} = d^{1i(1)}(q^*) \quad (3.41)$$

$$q^* \triangleq \left[ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{n-1} \right]^T \quad (3.42)$$

La cote  $h_i$  est donnée par le produit scalaire que nous effectuons dans le repère  $\mathcal{R}_1$

$$h_i = \left[ L^{01(1)} + d^{1i(1)} \right]^T k^{a(1)} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.43)$$

Désignons par  $\zeta$  le vecteur :

$$\zeta(q^*) \triangleq \sum_{i=1}^n m_i d^{1i}(q^*) \quad (3.44)$$

de composantes  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$  et  $\zeta^3$  ; soit :

$$\zeta(q^*) = \left[ \zeta^1 \ \zeta^2 \ \zeta^3 \right]^T \quad (3.45)$$

et par  $m$  la masse totale :

$$m \triangleq \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.45)$$

L'énergie potentielle due à la pesanteur s'écrit alors :

$$V = m g_0 \left[ {}^{01(1)}L^T k^{a(1)} + g_0 \zeta^T(q^*) k^{a(1)} + V_0 \right] \quad (3.46)$$

ou encore

$$V = \rho_1 m g_0 q_1 \cos \eta + g_0 \zeta^T(q^*) k^{a(1)} + V_0 \quad (3.46\text{bis})$$

avec

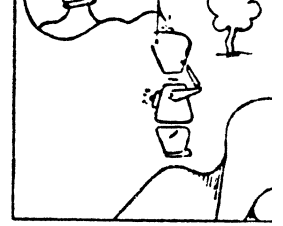
$$k^{a(1)} = \left[ \sin(\rho_1 q_1) \sin \eta \mid \cos(\rho_1 q_1) \sin \eta \mid \cos \eta \right]^T$$

Les forces dues à la pesanteur s'obtiennent en calculant le gradient du potentiel  $V.g(q)$  s'écrit :

$$g(q) = \left[ -\frac{\partial V}{\partial q_1} \quad -\frac{\partial V}{\partial q_2} \dots \dots -\frac{\partial V}{\partial q_n} \right]^T$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= \rho_1 m g_0 \cos \eta - \bar{\rho}_1 g_0 \zeta^T(q^*) \hat{z} k^{a(1)} \\ \frac{\partial V}{\partial q_i} &= g_0 \zeta_i^T(q^*) k^{a(1)} \quad (2 < i < n-1) \\ \frac{\partial V}{\partial q_n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$



où  $Z$  est la matrice de l'opérateur produit vectoriel par  $Z$ , elle s'écrit :

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.48)$$

et où  $\zeta_i(q)$  est le vecteur :

$$\zeta_i(q) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_i} \zeta(q^*) \quad (3.49)$$

de décomposition :  $\zeta_i^1$ ,  $\zeta_i^2$  et  $\zeta_i^3$ , soit :

$$\zeta_i = \begin{bmatrix} \zeta_i^1 & \zeta_i^2 & \zeta_i^3 \end{bmatrix}^T \quad (3.49\text{bis})$$

Soit  $\Pi$  la matrice de dimensions  $n \times 3$  définie par

$$\Pi(q^*) \triangleq \begin{vmatrix} -\bar{\rho}_1 \zeta^2 & -\bar{\rho}_1 \zeta^1 & -\rho_1 m \\ -\zeta_2^1 & -\zeta_2^2 & -\zeta_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\zeta_{n-1}^1 & -\zeta_{n-1}^2 & -\zeta_{n-1}^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.50)$$

que l'on notera :

$$\Pi(q^*) = \begin{bmatrix} \Pi^1 & \Pi^2 & \Pi^3 \end{bmatrix} \quad (3.50\text{bis})$$

Propriété 3.1

Le vecteur  $g(q)$  des forces de pesanteur admet la décomposition :

$$g(q) = g_0 \tilde{T}T(q^*) \quad v(\bar{\rho}_1 q_1) \quad (3.51)$$

avec

$$\tilde{T}T(q^*) \triangleq \begin{bmatrix} \sin \eta \Pi^1 & \sin \eta \Pi^2 & \cos \eta \Pi^3 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

et

$$v(\bar{\rho}_1 q_1) \triangleq \begin{bmatrix} \sin(\bar{\rho}_1 q_1) & \cos(\bar{\rho}_1 q_1) & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.53)$$

La propriété (3.1) constitue le premier élément de l'ensemble des propriétés qui nous permettra de résoudre le problème de la mise en oeuvre de la loi de commande (3.38)

Dans le cas des systèmes où le mouvement de la première coordonnée généralisée, quelle que soit sa nature, se fait suivant un axe dirigé dans le sens de la verticale ascendante i.e.  $\eta = 0$ , le problème de la décomposition de  $g(q)$  ne se pose évidemment pas. C'est notamment le cas du robot vertical 80 et du Stanford Scheinman Arm.

*Exemple :*

Examinons pour illustrer la décomposition (3.51) l'exemple du robot manipulateur MA23 pour lequel  $\eta$  est égale à  $-\Pi/2$  (cf figure 3.5)

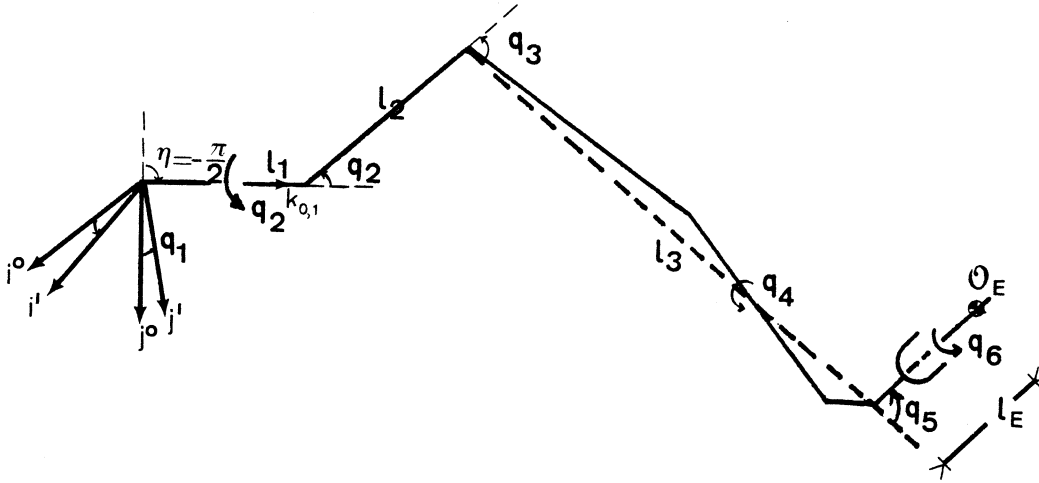
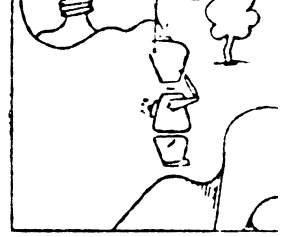


FIGURE 3.5 : Schéma du robot manipulateur MA 23

Les effets des corps  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  étant compensés par des contre-poids, les expressions des composantes dans  $\mathcal{R}_1$  du vecteur  $\zeta$  (3.4.4) sont dans ce cas relativement simples :

$$\zeta \triangleq \begin{bmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{bmatrix} = m_5 \begin{bmatrix} -S_4 S_5 l_E \\ S_2 l_2 + S_23 (l_3 + C_5 l_E) + C_23 C_4 S_5 l_E \\ 0 \end{bmatrix}$$

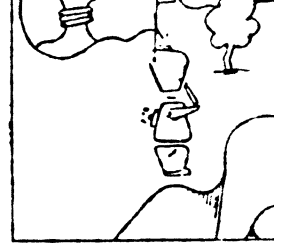
$\eta$  étant ici de  $-\pi/2$ , la matrice  $\hat{\Pi}(q^*)$  s'écrit :

$$\tilde{\Pi}(q^*) = m_5 \begin{array}{ccc} s2l_2 + s23(l_3 + c5l_E) & s4s5l_E & 0 \\ +c23c4s5l_E & & \\ 0 & -c2l_2 - c23(l_3 + c5l_E) & 0 \\ & +s23c4s5l_E & \\ 0 & -c23(l_3 + c5l_E) & 0 \\ & +s23 c4 s5 l_E & \\ c4 s5 l_E & c23 s4 s5 l_E & 0 \\ s4 c4 l_E & -c23 c4 c5 l_E & 0 \\ & +s23 s5 & \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

s'écrit : En effectuant le produit par  $v(\bar{\rho}_1, q_1) \triangleq |s1 \ c1 \ 1|^T$  le vecteur  $g(q)$

$$g(q) = g_0 m_5 \begin{array}{l} [s2l_2 + s23(l_3 + c5l_E) + c23c4s5l_E]s1 + (s4s5l_E)c1 \\ - [c2l_2 + c23(l_3 + c5l_E) - s23c4s5l_E] c1 \\ - [c23(l_3 + c5l_E) - s23 c4 s5 l_E] c1 \\ (c4 s5 l_E) s1 + (c23 s4 s5 l_E) c1 \\ (s4 c4 l_E) s1 - (c23 c4 c5 l_E - s23 s5 l_E) c1 \\ 0 \end{array}$$





### 3.4.2 - PROPRIETES DE LA MATRICE JACOBIENNE $J_E(q)$

La matrice jacobienne constitue un élément fondamental dans la définition des matrices  $\Lambda(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$  et  $\tilde{C}(q)$ . Les propriétés de ces dernières découlent comme nous le verrons au § 3.4.4, des propriétés de cette matrice.

L'extension au cas des systèmes redondants nous conduit à rechercher les propriétés de la matrice jacobienne, en nous plaçant dans le cas où  $(n \geq m_0)$

Nous allons, pour développer les propriétés de la matrice jacobienne  $J_E(q)$  associée au modèle géométrique  $G_E(q)$  qui utilise les angles d'Euler, reprendre son calcul en partant de la définition (1.37) (cf § 1.4).

Dans ce cas, les coordonnées opérationnelles s'écrivent :

$$X = G_E(q) = \begin{bmatrix} L^T(q) & R^T(q) \end{bmatrix}^T$$

avec

$$L(q) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \quad (3.54)$$

et

$$R(q) = \begin{bmatrix} \psi & \theta & \varphi \end{bmatrix}^T$$

La matrice jacobienne  $J_E(q)$  est, d'après la définition (1.37) donnée par :

$$J_E(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} L(q) & \frac{\partial}{\partial q_2} L(q) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} L(q) \\ \frac{\partial}{\partial q_1} R(q) & \frac{\partial}{\partial q_2} R(q) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} R(q) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Rappelons la définition (3.42) des coordonnées  $q^*$

$$q^* = [q_2 \quad q_3 \quad \cdots \quad q_{n-2} \quad q_{n-1}]^T$$

### Théorème 3.1

La matrice jacobienne  $J_E(q)$  admet la décomposition :

$$J_E(q) = \Omega_E^*(\rho_1, q_1) J_E^*(q^*) \quad (3.56)$$

où  $\Omega_E^*(\rho_1, q_1)$  et  $J_E^*(q^*)$  sont<sup>†</sup>, respectivement de dimension  $6 \times 6$  et  $6 \times n$ .

### Démonstration<sup>(++)</sup>

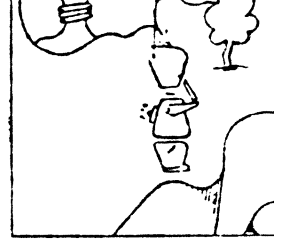
Les définitions (1.13-14) et les relations (1.10-11) permettent en utilisant la propriété (1.17) de mettre la matrice de passage du repère  $\mathcal{R}_0$  au repère  $\mathcal{R}_n$  sous la forme :

$$\begin{aligned} S^{on} &= S_{\varphi_1} \quad S^* \quad S_{\varphi_n} \\ S^* &= S^{1(n-1)} \quad S_{\psi_n} \quad S_{\theta_n} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Le vecteur  $L$  des trois coordonnées cartésiennes peut, à partir de la relation (1.20) être mis sous la forme

<sup>†</sup> Ne pas confondre  $\Omega_E^*(q)$  avec  $\Omega_E(q)$  de la relation (1.48) (cf § 1.4)

<sup>++</sup> Se référer aux § 1.3.1 et § 1.3.3. du premier chapitre



$$L = L^{on} + S^{on} L^{n(n+1)} \quad (3.58)$$

En remarquant que  $L^{n(n+1)}$  est "invariant" par la transformation  $S_{\varphi_n}$  la relation (3.58) s'écrit :

$$L = L^{01} + S_{\varphi_1} L^*$$

avec

$$L^* = L^{(n-1)n} + S^* (L^{(n-1)n} + L^{n(n+1)}) \quad (3.58bis)$$

L'examen des relations (1.7-9) (1.17-18) et (3.57-58) montre que les éléments de  $S^*$  et  $L^*$  sont des fonctions des  $(n-2)$  coordonnées généralisées  $q^*$  :

$$S^* = S^*(q^*) \quad (3.58)$$

et

$$L^* = L^*(q^*) \quad (3.60)$$

L'utilisation de la décomposition (3.57) dans l'identité (1.25) permet, compte tenu de (3.59) de mettre les angles d'Euler sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(q) &= \psi^*(q^*) + \rho_1 q_1 \\ \theta(q) &= \theta^*(q^*) \\ \varphi(q) &= \varphi^*(q^*) + q_n \end{aligned} \quad (3.61)$$

où  $\psi^*$ ,  $\theta^*$  et  $\varphi^*$  vérifient l'identité :

$$S^* = S_{\psi^*} S_{\theta^*} S_{\varphi^*} \quad (3.62)$$

dans laquelle  $S_{\psi^*}$ ,  $S_{\theta^*}$  et  $S_{\varphi^*}$  représentent les trois matrices orthogonales

correspondantes aux trois rotations d'angles d'Euler  $\psi^*$ ,  $\theta^*$  et  $\phi^*$  définis comme en (1.14).

Désignons par  $R^*$  la matrice colonne

$$R^*(q^*) \triangleq \begin{bmatrix} \psi^*(q^*) & \theta^*(q^*) & \phi^*(q^*) \end{bmatrix}^T \quad (3.63)$$

Le vecteur  $Z^{-1}$  invariant par la transformation  $S_1$  la matrice jacobienne  $J_E(q)$  se décompose suivant la forme recherchée (3.56) dans laquelle les matrices  $\Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1)$  et  $J^*(q^*)$  sont données par :

$$\Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) = \left| \begin{array}{c|c} S_{\phi_1} & 0_3 \\ \hline 0_3 & I_3 \end{array} \right| \quad (3.64)$$

$$J_E^*(q^*) = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} l_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} L^*(q^*) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_{n-1}} L^*(q^*) & l_n \\ \hline \kappa_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} R^*(q^*) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_{n-1}} R^*(q^*) & \kappa_n \end{array} \right| \quad (3.65)$$

avec

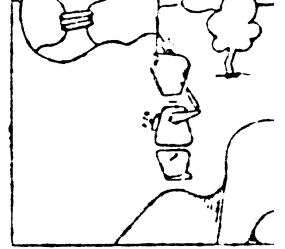
$$l_1 = \rho_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \bar{\rho}_1 \hat{z} L^*$$

$$l_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\kappa_1 = \bar{\rho}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

et

$$\kappa_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$



$\hat{Z}$  étant donnée par (3.48).

### Corrolaire (3.1)

Les matrices  $H_{E1}(q)$  et  $H_{E2}(q)$  définies par :

$$h_E(q, \dot{q}) \triangleq \dot{J}_E(q) \dot{q} = H_{E1}(q) [\dot{q}\dot{q}] + H_{E2}(q) [\dot{q}^2] \quad (3.66)$$

admettant la décomposition

$$H_{E1}(q) = \Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) H_{E1}^*(q^*) \quad (3.67)$$

et

$$H_{E2}(q) = \Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) H_{E2}^*(q^*)$$

### Démonstration

$h_E(q, \dot{q})$  peut, en vertu du théorème (3.1) être développée sous la forme :

$$h_E(q, \dot{q}) = [\dot{\Omega}_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) J_E^*(q^*) + \Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) \dot{J}^*(q^*)] \dot{q} \quad (3.68)$$

$\Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1)$  étant une matrice orthogonale d'ordre 6, on peut aisément vérifier :

$$\Omega_E^{*-1}(\bar{\rho}_1 q_1) \dot{\Omega}_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) = \bar{\rho}_1 \dot{q}_1 \hat{Z}_6$$

avec

$$\hat{Z}_6 \triangleq \begin{vmatrix} \hat{Z} & & & & & \\ & & & & & \mathbb{O}_3 \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \mathbb{O}_3 \end{vmatrix} \quad (3.69)$$

dans laquelle Z est l'opérateur (3.48).

La relation (3.68) s'écrit alors :

$$h_E(q, \dot{q}) = \Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) h_E^*(q^*, \dot{q}) \quad (3.70)$$

avec

$$h_E^*(q^*, \dot{q}) = \left[ \bar{\rho}_1 \dot{q}_1 \quad z_6 \quad J_E^*(q^*) + \dot{J}_E^*(q^*) \right] \dot{q} \quad (3.71)$$

La décomposition recherchée (3.66) s'obtient finalement en développant  $h(q, \dot{q})$  sous la forme :

$$h_E^*(q^*, \dot{q}) = H_{E1}^*(q^*) \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + H_{E2}^*(q^*) \begin{bmatrix} \dot{q}^2 \end{bmatrix} \quad (3.71bis)$$

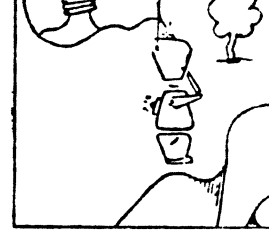
### 3.4.3 - PROPRIETES DE LA MATRICE JACOBIENNE $J_{OR}(q)$

Comme nous l'avons montré au chapitre premier, une représentation non redondante de l'orientation de l'organe terminal peut être obtenue en utilisant trois paramètres parmi les quatre P.O.R. Le modèle géométrique associé s'écrit

$$\begin{aligned} \chi &= G_{OR}(q) \\ (1.95) \quad \chi &= \begin{bmatrix} x & y & z & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

et la matrice jacobienne est, d'après (1.97) donnée par :

$$J_{OR}(q) = \Omega_{OR}(q) J_o(q)$$



avec

$$\Omega_{OR}(q) = \left| \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_3 & 0_3 \\ \hline 0_3 & \frac{1}{2} \overline{\sigma} \end{array} \right| \quad (3.72)$$

dans laquelle l'opérateur  $\overline{\sigma}$  est donné par la relation (1.96).  $J_o(q)$  étant la matrice jacobienne de base donnée au § 1.4.1 (cf ref 1.44) les éléments de la matrice  $J_o(q)$  sont, d'après le choix de l'emplacement du point définissant la position de l'organe terminal, indépendants de la  $n^{\text{ième}}$  coordonnées généralisée. En utilisant la relation (1.44) on peut vérifier la propriété :

### Propriété 3.2

La matrice  $J_{OR}(q)$  admet la décomposition

$$J_{OR}(q) = \Omega_{OR}^*(q) J_o^*(q^*) \quad (3.73)$$

$\Omega_{OR}^*(q)$  et  $J_o^*(q^*)$  sont, avec les notations du chapitre I, données par :

$$\Omega_{OR}^*(q) = \left| \begin{array}{c|c} S^{01} & 0_3 \\ \hline 0_3 & \frac{1}{2} \overline{\sigma} S^{01} \end{array} \right| \quad (3.74)$$

et

$$J_{\circ}^*(q^*) = \begin{vmatrix} \bar{\rho}_1 \hat{z} L^{1n} + \rho_1 z^1 & | & s^{12} (\bar{\rho}_2 \hat{z} L^{2n} + z^2) & | \dots & | & s^{1n} \hat{z} L^{nn} \\ \hline & z^1 & | & s^{12} z^2 & | \dots & | & s^{1n} z^n \end{vmatrix} \quad (3.75)$$

En utilisant la relation :

$$\left[ \frac{d}{dt} \bar{\sigma} \right] \omega = - \frac{\omega^2}{2} \sigma \quad (\omega^2 = \omega^T \omega) \quad (3.76)$$

dont la démonstration est donnée en Annexe A3, on peut énoncer :

### Propriété 3.3

La matrice colonne  $h_{OR}(q, \dot{q})$  définie par :

$$h_{OR}(q, \dot{q}) \triangleq J_{OR}^*(q) \dot{q}$$

peut être développée sous la forme :

$$h_{OR}(q, \dot{q}) = \Omega_{OR}^*(q) h_{\circ}^*(q^*, \dot{q}) - \frac{\omega^2}{4} X_R \quad (3.77)$$

avec

$$h_{OR}^*(q^*, \dot{q}) = J_{\circ}^*(q^*) \dot{q} = H_{01}^*(q^*) [\dot{q} \dot{q}] + H_{02}^*(q^*) [\dot{q}^2] \quad (3.78)$$

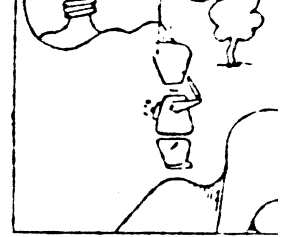
et

$$X_R = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4]^T \quad (3.79)$$

Notons que la relation (3.78) s'obtient en développant  $h_{\circ}^*(q^*, \dot{q})$  selon une expression similaire à celle que nous avons établie pour  $h_E^*(q^*, \dot{q})$  (cf rel. 3.71) ;  $h_0(q, \dot{q})$  s'écrit alors

$$h_0^*(q^*, \dot{q}) = \left[ \rho_1 \dot{q}_1 \hat{z}_6 J_0^*(q^*) + \dot{J}_0^*(q^*) \right] \dot{q}$$





### 3.4.4 - PROPRIETES DES MATRICES $\Lambda(q)$ , $B(q)$ et $C(q)$

Plaçons-nous à nouveau dans le cas des systèmes non-redondants et rappelons nous la propriété 2.1 (cf § 2.4.2) concernant l'indépendance des éléments des matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C(q)$  de la première et de la  $n^{\text{ième}}$  coordonnée généralisée.

#### *i) - Représentation utilisant les angles d'Euler*

Les propriétés données par les relations (3.51), (3.56) et (3.67) et les relations (3.17) et (3.36), nous permettent, en ce qui concerne le système des coordonnées opérationnelles utilisant les angles d'Euler, d'établir l'ensemble des propriétés :

#### Propriété 3.4

$$\Lambda_E(q) = \Omega_E^*(\bar{\rho}_1 q_1) \tilde{\Lambda}_E(q^*) \Omega_E^{*T}(\bar{\rho}_1 q_1) \quad (3.80)$$

où

$$\Lambda_E(q^*) = J_E^{*-T}(q^*) A(q^*) J_E^{*-1}(q^*)$$

$$\tilde{B}_E(q) = \tilde{B}_E(q^*) = B(q^*) - J_E^{*-T}(q^*) \tilde{\Lambda}_E(q^*) H_{E1}^*(q^*) \quad (3.81)$$

et

$$\tilde{C}_E(q) = \tilde{C}_E(q^*) = C(q^*) - J_E^{*-T}(q^*) \tilde{\Lambda}_E(q^*) H_{E2}^*(q^*) \quad (3.82)$$

avec d'autre part :

$$(3.51) \quad g(q) = \tilde{\Pi}(q^*) v(\bar{\rho}_1 q_1)$$

L'utilisation de ces propriétés permet de mettre la loi de commande (3.38) assurant le découplage des mouvements de l'organe terminal sous la forme :

$$\Gamma(t) = J_E^{*T}(q^*) \tilde{\Lambda}_E(q^*) F_m^* + B_E(q^*) [\dot{q} \dot{q}] + C_E(q^*) [\dot{q}^2] - \tilde{H}(q^*) v(\bar{\rho}_1 q_1)$$

avec

$$F_m^* = \Omega_E^{*T}(\bar{\rho}_1 q_1) F_m \quad (3.83)$$

Comme A, B et C, les matrices  $\tilde{\Lambda}_E$ ,  $B_E$  et  $C_E$  de dimensions respectives identiques, sont fonction des  $(n-2)$  coordonnées généralisées  $q^*$ . La mémorisation d'un élément de ces dernières nécessiterait donc, avec la même quantification une place mémoire identique à celle nécessaire pour mémoriser un élément des trois premières ; soit 4 K mots/élément pour un système à six degrés de liberté et pour une quantification à huit niveaux.

Avec des moyens de calculs similaires à ceux utilisés pour le découplage des mouvements articulaires [RAI77] l'utilisation des propriétés (3.4) offre la possibilité de réaliser le "découplage des mouvement de l'organe terminal".

Le schéma bloc du système de commande est représenté sur la figure (3.6)

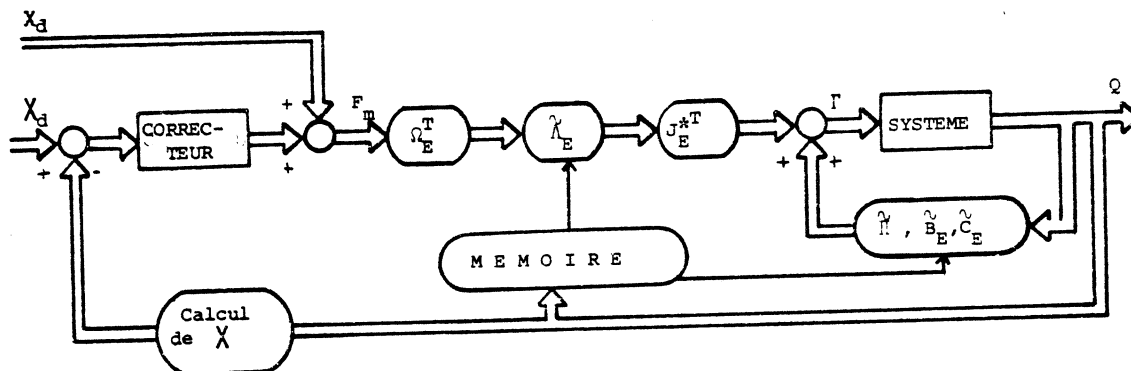
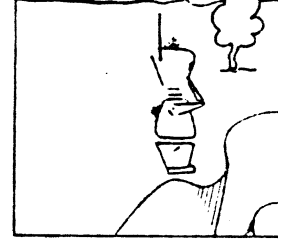


FIGURE 3.6 : Découplage pour la représentation  $G_E(q)$



ii) - Représentation utilisant les P.O.R.

En ce qui concerne le système de coordonnées utilisant les P.O.R., il convient, compte tenu de l'expression de  $h_{OR}(q, \dot{q})$  (cf rel 3.77) de reprendre pour définir les matrices B et C la relation (3.33) :

$$\tilde{b}_{OR}(q, \dot{q}) = b(q, \dot{q}) - J_{OR}^T(q) \Lambda_{OR}(q) h_{OR}(q, \dot{q})$$

Les relations (3.17), (3.73) et (3.77) permettent d'établir :

$$\tilde{b}_{OR}(q, \dot{q}) = \tilde{b}_0(q, \dot{q}) + J_0^T(q^*) \tilde{\lambda}_0(q^*) \Omega_{OR}^{*-1}(q^*) \frac{\omega^2}{4} \chi_R \quad (3.84)$$

avec

$$b_0(q, \dot{q}) = b(q, \dot{q}) - J_0^T(q^*) \Lambda_0(q^*) h_0^*(q^*, \dot{q}) \quad (3.85)$$

où

$$\Lambda_0(q^*) \triangleq J_0^{*-T}(q^*) A(q^*) J_0^{*-1}(q^*) \quad (3.86)$$

En utilisant la décomposition (3.78) nous introduisons les deux matrices  $B_0$  et  $C_0$  telles que :

$$\tilde{b}_0(q, \dot{q}) = \tilde{B}_0(q) |\dot{q} \dot{q}| + \tilde{C}_0(q) |\dot{q}^2| \quad (3.87)$$

### Propriété 3.5

$$\Lambda_{OR}(q) = \Omega_{OR}^{*-1}(q) \Lambda_0(q^*) \Omega_{OR}^{*-1}(q) \quad (3.88)$$

$$\tilde{B}_0(q) = \tilde{B}_0(q^*) = B(q^*) - J_0^T(q^*) \tilde{\lambda}_0(q^*) H_{01}^*(q^*) \quad (3.89)$$

$$\tilde{C}_0(q) = \tilde{C}_0(q^*) = C(q^*) - J_0^T(q^*) \tilde{\lambda}_0(q^*) H_{01}^*(q^*) \quad (3.90)$$

La loi de commande (3.38) est dans ce cas donnée par la figure (3.7).

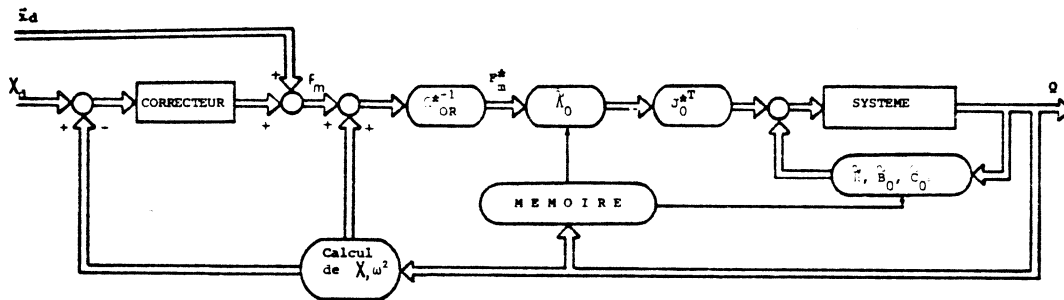
$$\Gamma(t) = J_0^T(q^*) \lambda_0(q^*) F_m^* + \tilde{B}_0(q^*) [\dot{q} \dot{q}] + \tilde{C}_0(q^*) [\dot{q}^2] - \tilde{H}(q^*) v(\bar{p}_1 q_1)$$

avec

(3.91)

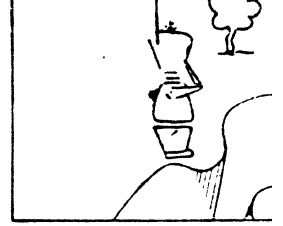
$$F_m^* = \Omega_{UR}^{*-1}(q) \left[ F_m + \frac{\omega^2}{4} \chi_R \right]$$

$F_m$  étant l'entrée du système découplé.



**FIGURE 3.7** : Découplage pour la représentation utilisant les P.O.R

Dans cette loi de commande, l'intervention des éléments concernant les paramètres représentatifs de l'orientation se fait, comme le montre la relation (3.91) au niveau des forces opérationnelles  $F_m^*$  ou plus précisément au niveau des trois dernières composantes de  $F_m$  que nous désignerons par  $F_{mR}^*$ . Notons que les composantes de  $F_m^*$  sont exprimées ici dans le repère  $\mathcal{R}_1$  lié au premier corps mobile.



Le vecteur  $\omega$  décrivant la vitesse de rotation angulaire de l'organe terminal obéit par cette loi de commande à l'équation suivante exprimée dans  $\mathcal{R}_1$  :

$$\dot{\omega} = F_{mR}^* \quad (3.92)$$

$$F_{mR}^* = 2 S^{O1T} \bar{\sigma}^{-1} \left[ F_{mR} + \frac{\omega^2}{4} \sigma \right] \quad (3.93)$$

$F_{mR}^*$  étant exprimée en fonction des trois paramètres  $\sigma$  parmi le quadruplet  $\lambda$  des P.O.R. définissant l'évolution désirée. Le choix de ces paramètres correspond comme nous l'avons vu au § 1.6.2 au triplet  $\sigma$  tel que le déterminant de  $\sigma$  est le plus élevé.

Ce choix permet, lorsqu'une dynamique linéaire au niveau du triplet  $\sigma \triangleq [\sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4]^T$  est imposée, d'assurer une dynamique quasi-linéaire au niveau du paramètre restant  $\sigma_1$ .

En effet, le paramètre  $\sigma_1$  obéit à l'équation :

$$\ddot{\sigma}_1 = \frac{\omega^2 \sigma_1}{4} - \frac{1}{2} \sigma^T \dot{\omega} \quad (3.94)$$

qui, en utilisant (3.92-93) s'écrit :

$$\ddot{\sigma}_1 = -\sigma^T \bar{\sigma}^{-1} F_{mR} \quad (3.95)$$

$F_{mR}$  ayant, selon la nature de la tâche imposée, l'une des deux formes suivantes :

a) - *Mouvement imposé*

$$F_{mR} = \ddot{\sigma}^* - \xi [\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^*] - K [\sigma - \sigma^*] \quad (3.96)$$

b) - *Configuration finale à atteindre*

$$F_{mR} = -\xi \dot{\sigma} - K [\sigma - \sigma^*] \quad (3.97)$$

Dans ces deux cas, on peut, en utilisant la relation :

$$\ddot{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\bar{v}}{\sigma} \dot{\omega} - \frac{\omega^2}{4} \sigma \quad (3.98)$$

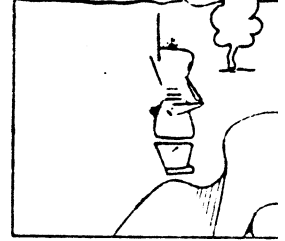
donnée en Annexe A3, vérifier que l'imposition de  $F_{mR}$  conduit au niveau du paramètre  $\sigma_1$  à une dynamique se rapprochant d'autant plus d'une dynamique linéaire que la précision assurée au niveau de l'opérateur inverse  $\sigma^{-1}$  est élevée. Le choix des P.O.R. retenu au § 1.6.2 du premier chapitre répond donc au mieux à ce problème.

### REMARQUE

*Faisant intervenir dans ses composantes la matrice jacobienne de base<sup>(+)</sup> la loi de commande (3.91) s'étend à toutes les représentations de l'organe terminal.*

Au paragraphe III.6, nous reviendrons sur ce problème. Notons, cependant, que bien qu'elle puisse être utilisée dans le cas de la représentation utilisant les angles d'Euler, la loi de commande (3.91) est notablement plus complexe que celle que nous avons élaborée au paragraphe 3.4.4. en utilisant les propriétés spécifiques de cette représentation (cf rel. 3.83).

(+) Exprimée dans le repère  $\mathcal{R}_1$ .



### III.5 - MISE EN OEUVRE PAR LES TECHNIQUES D'APPROXIMATION MULTIVARIABLE

Les propriétés établies au paragraphe 3.4.4, nous ont permis de ramener les dimensions du problème de la mémorisation des coefficients dynamiques que fait intervenir le découplage des mouvements de l'organe terminal, à celles du problème posé par le découplage des mouvements articulaires.

La taille de la mémoire requise pour la tabulation de ces coefficients [RAI77] étant, comme nous l'avons souligné, très élevée, nous sommes orientés vers la recherche d'un meilleur compromis entre "place mémoire volume de calcul et précision".

Cette recherche que nous avons conduite en nous appuyant sur les techniques d'approximation multivariable a été concrétisée par une étude comparative qui a eu le Robot Vertical 80 comme support [PEL80].

Cette étude a été menée en considérant les trois premiers degrés de liberté. Les coefficients dynamiques, éléments des matrices  $\tilde{\Lambda}(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$ ,  $\tilde{C}(q)$  et  $\tilde{\Pi}(q)$  sont dans ce cas, fonction des deux coordonnées généralisées  $q_2$  et  $q_3$ . Les résultats ont été par la suite étendus au cas général des systèmes à  $n$  degrés de liberté.

### 3.5.1 - DEVELOPPEMENT EN POLYNOMES DE LEGENDRE

Une première approche basée sur la technique des polynomes orthogonaux a conduit à l'utilisation des polynomes de Legendre.

L'approximation d'une fonction  $\mathcal{F}$  a deux variables  $u$  et  $v$ , supposées évoluer dans le domaine ( $u, v \in [-1, 1]$ ) par un développement en polynomes de Legendre de degré  $k$  conduit à la fonction approchée :

$$\mathcal{F}_a^k(u, v) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij} L_i(u) L_j(v)$$

Rappelons que les  $(k+1)^2$  coefficients  $a_{ij}$  s'obtiennent par

$$a_{ij} = \frac{i+1}{2} \frac{j+1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathcal{F}(u, v) L_i(u) L_j(v) du dv$$

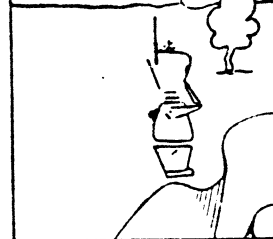
et que les polynomes de Legendre  $L_i(u)$  sont donnés par la relation récurrente [BOU69]

$$L_{i+1}(u) = \frac{2i+1}{i+1} u L_i(u) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(u)$$

avec

$$L_0(u) = 1 \quad \text{et} \quad L_1(u) = u$$





### 3.5.2 - VARIATIONS DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES ET SINGULARITES

Le développement en polynomes de Legendre a été appliqué aux coefficients dynamiques relatifs aux trois premiers degrés de liberté du robot vertical 80. L'évolution de ces coefficients se fait, comme nous l'avons vu, en fonction du couple de variables  $(q_2, q_3)$ .

L'examen des premiers résultats a fait apparaître que les variations dans l'espace de configuration des coefficients dynamiques relatifs aux mouvements de l'organe terminal sont sensiblement plus importantes que celles observées au niveau des coefficients qui interviennent dans les équations régissant les mouvements articulaires.

L'importance de ces variations est due en grande partie à l'intervention dans leurs expressions de l'inverse de la matrice jacobienne, où plus précisément à la présence de l'opération de "division" par le déterminant de cette matrice.

Or, compte tenu de la grande simplicité de son expression (cf chapitre I), le déterminant de  $J(q)$  peut être aisément obtenu en temps réel. L'approximation peut alors être menée au niveau des matrices de :

$$\det^2 |J(q)| \tilde{A}(q), \det |J(q)| \tilde{B}(q) \text{ et } \det |J(q)| \tilde{C}(q)$$

dont les variations sont notablement moins importantes que celles des matrices  $\tilde{A}(q)$ ,  $\tilde{B}(q)$  et  $\tilde{C}(q)$ . La division lors de la commande par  $\det |J(q)|$  ou  $\det^2 |J(q)|$  interviendra naturellement, non pas au niveau des éléments (approchés) de ces matrices, mais au niveau du vecteur de la commande, ce qui représente deux opérations de division par degré de liberté.

REMARQUE

La précédente démarche permet, par ailleurs, d'aborder d'une manière intéressante le problème posé au voisinage des configurations singulières. En effet, ce procédé conduit à maintenir définie la direction du vecteur de commande dans l'espace des coordonnées généralisées ; les composantes de ce vecteur s'obtiennent alors en satisfaisant les contraintes sur les valeurs limites des commandes.

En opérant de la sorte, les résultats obtenus sur le robot vertical 80 ont conduit à constater que l'approximation multivariable utilisant les polynômes de Legendre peut être largement limitée à l'ordre 3.

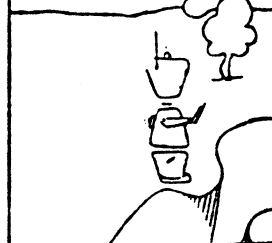
En effet, l'erreur relative globale calculée au sens des moindres carrés reste pour cette approximation inférieure à 1%. Cette erreur est plus de cinq fois supérieure lorsqu'une tabulation utilisant huit niveaux de quantification est effectuée [RAI77].

### 3.5.3 - BASE DE DEVELOPPEMENT ET COUPLE DE VARIABLES

Le développement en polynômes de Legendre dans le cas multivariable présente l'inconvénient d'interdire une analyse plus fine de l'évolution de l'erreur en fonction du nombre des coefficients de l'approximation.

En effet, cette approche conduit à opérer par addition d'un nombre très élevé de coefficients lors de chaque passage d'un degré  $k$  à un degré  $k+1$ .

L'examen des performances obtenues pour différents couples de variables et l'analyse des expressions des fonctions approchées ont fait apparaître l'intérêt de choisir le couple de variables  $z$  et  $r$  (représentant respectivement



la cote du point de l'extrémité et la longueur du vecteur de l'origine à ce point comme le montre la figure 3.8) et conduit à une procédure d'approximation notablement plus avantageuse.

Cette procédure consiste, pour une fonction à deux variables telle que  $\mathcal{F}(u,v)$ , à effectuer le développement :

$$\tilde{\mathcal{F}}_a^k(u, v) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \alpha_{ij} u^{(i)} v^{(j)}$$

En comparaison avec l'expression de  $\mathcal{F}_a^k(u,v)$  qui après changement de base s'écrit :

$$\mathcal{F}_a^k(u, v) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij}^* u^{(i)} v^{(j)}$$

l'approximation  $\tilde{\mathcal{F}}_a^k(u,v)$  fait abstraction des termes en  $u^{(i)} v^{(j)}$  tel que  $i+j > k$  ; cette approximation qui sera dite à l'ordre  $k$  met en jeu  $(k+1)(k+2)/2$  coefficients ; le nombre des coefficients intervenant dans  $\mathcal{F}_a^k(u,v)$  étant de  $(k+1)^2$ .

Alors que l'approximation par développement en polynomes de Legendre de degrés 2 (9 coefficients) conduit dans le cas de notre exemple à une erreur relative allant jusqu'à 7.3%, l'approximation à l'ordre 3 (10 coefficients) en suivant ce dernier procédé et en utilisant le couple de variables  $(z,r)$  permet de ramener cette erreur à une valeur voisine de celle obtenue en faisant intervenir les polynomes de Legendre de degré 3 (16 coefficients).

Tout en maintenant la précision, ce procédé permet alors de réaliser une réduction d'environ 37% du nombre de coefficients à mémoriser.

Toutefois, l'utilisation du couple de variables  $(z, r)$  soulève le problème du caractère non bijectif des relations qui le lient à  $(q_2, q_3)$  dans le cas général.

En effet, à des valeurs données de  $z$  et  $r$  peuvent correspondre des configurations différentes du système (cf figure 3.8) lorsque la coordonnée  $q_3$  est de type rotatif ayant des valeurs limites de signe opposé. C'est notamment le cas du robot vertical 80.

Ce problème lorsqu'il se pose, rend a priori nécessaire la duplication des coefficients à mémoriser ce qui enlève à ce couple de variables tout intérêt.

Nous énonçons au paragraphe suivant une importante propriété dynamique qui est à la base d'une solution fort intéressante de ce problème.

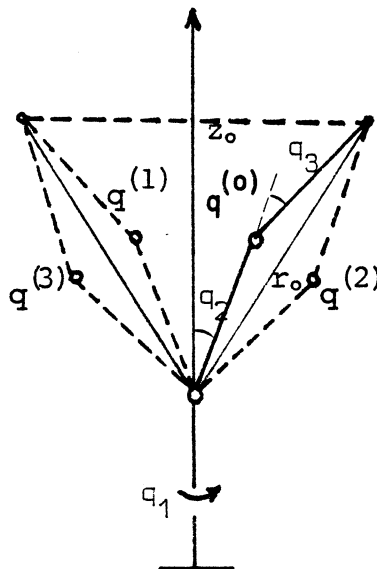
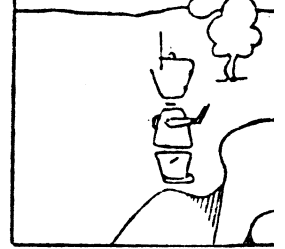


FIGURE 3.8 : Définition de  $(z, r)$



L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction  $\mathcal{F}(u,v)$  par  $\tilde{\mathcal{F}}_a^3(u,v)$  se fait en déterminant, au sens des moindres carrés, le 10-uplets  $H$  des coefficients de la décomposition suivant le 10-uplets de fonctions de base

$$W \triangleq \left[ 1 \mid u \mid v \mid uv \mid u^2 \mid v^2 \mid uv^2 \mid u^2v \mid u^3 \mid v^3 \right]^T$$

et la fonction approchée s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{F}}_a^3(u, v) = H^T W$$

L'algorithme de recherche du 10-uplets  $H$  des coefficients de l'approximation fait appel à la résolution d'un système de 10 équations à 10 inconnues [PRO67].

Quelques résultats types de l'approximation des coefficients dynamiques dans le cas de notre exemple sont présentés sur la figure 3.9.

#### 3.5.4 - PERFORMANCES ET GENERALISATION

Comparée à l'approche de la tabulation (en 8 niveaux de quantification), l'approximation à l'ordre 3 utilisant le couple de variables  $(z,r)$  permet, au prix de 18 opérations arithmétiques par coefficient dynamique (0.1 ms/T1600) de réaliser une réduction de plus de 84% de la place mémoire et d'augmenter dans un rapport supérieur à 5 la précision de l'approximation.

Toutefois, cette approche d'approximation pose, comme nous l'avons vu, le problème de l'utilisation du couple  $(z, r)$  dans le cas général des robots manipulateurs.

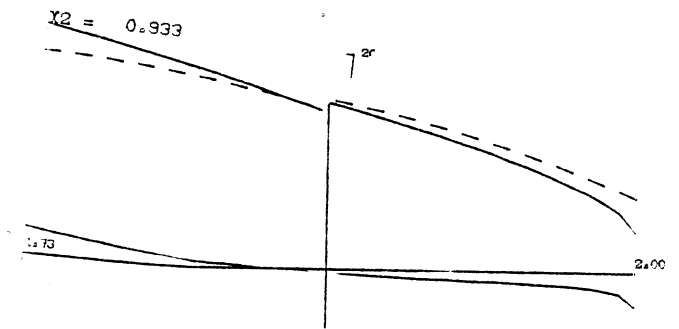
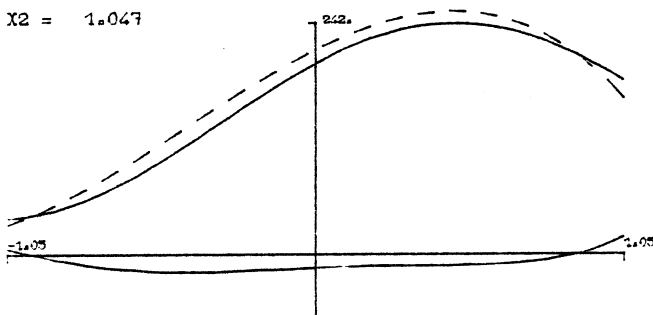
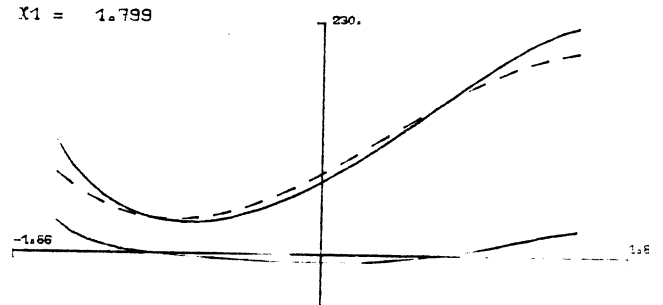
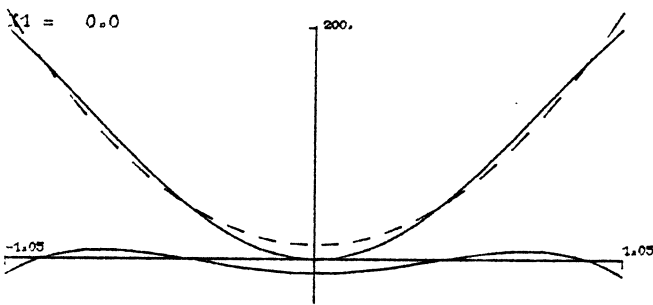


FIGURE 3.9 a

FIGURE 3.9 b

Développement au degré 3 utilisant :

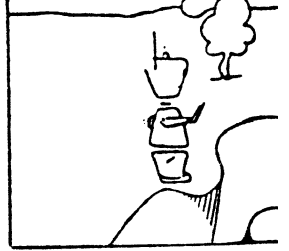
$$(X_1 = q_2, X_2 = q_3)$$

(16 coefficients)

Approximation à l'ordre 3 utilisant :

$$(X_1 = z, X_2 = r)$$

(10 coefficients)



Bien que le développement en polynomes de Legendre au degré 3 utilisant le couple  $(q_2, q_3)$  présente un avantage certain par rapport à l'approche de la tabulation, son utilisation conduit à des performances nettement inférieures à celles que l'on obtiendrait par l'approximation faisant intervenir  $z$  et  $r$ .

Des travaux très récents concernant le problème posé par l'utilisation dans le cas général du couple de variables  $(z, r)$ , nous ont permis de dégager une solution issue d'une importante propriété dynamique que nous énonçons dans le cas des systèmes possédant 6 degrés de liberté.

Supposons que l'évolution du point figuratif dans l'espace des coordonnées généralisées s'étende au domaine :

$$\mathcal{D}_q \triangleq \prod_{i=1}^6 \left[ \underline{q}_i, \bar{q}_i \right]$$

avec

$$\underline{q}_i = -\pi \quad \text{et} \quad \bar{q}_i = \pi$$

et considérons à l'intérieur de  $\mathcal{D}_q$  le domaine  $\bar{\mathcal{D}}_q$  restreignant l'évolution de  $q_2$  et  $q_3$  à  $[0, \pi]$

### Propriété 3.8

*Lorsque le mouvement de chacun des corps articulés s'effectue suivant un axe principal d'inertie, la donnée de l'évolution dans  $\bar{\mathcal{D}}_q$  des coefficients dynamiques définit en valeur absolue leur évolution dans le domaine  $\mathcal{D}_q$ .*

En effet, à toute configuration du manipulateur appartenant au domaine  $\mathcal{D}_q$  correspond une configuration de  $\bar{\mathcal{D}}_q$  dont les coefficients dynamiques lui sont, à des signes près, identiques.

Cette configuration s'obtient par une symétrie plane par rapport au plan  $\mathfrak{F}_1$  défini par les deux premiers axes de mouvement ou par rapport au plan  $\mathfrak{F}_2$  perpendiculaire à  $\mathfrak{F}_1$  et contenant le second axe de mouvement, ou encore par le produit de symétrie par rapport à ces deux plans, comme le montre la figure 3.10

Sur cette figure sont représentées les trois configurations  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$  et  $q^{(3)} \in \bar{\mathfrak{D}}_q$  pour lesquelles le couple  $(z, r)$  prend les valeurs  $z_0$  et  $r_0$  relatives à la configuration  $q^{(0)} \in \bar{\mathfrak{D}}_q$ .

Les mouvements articulaires étant effectués suivant des axes principaux d'inertie, la symétrie, par rapport à  $\mathfrak{F}_1$ , des configurations  $q^{(0)}$  et  $q^{(1)}$  du manipulateur conduit à une symétrie au niveau des valeurs des coefficients dynamiques correspondantes à ces deux configurations. En effet, la configuration  $q^{(1)}$  étant telle que :

$$q^{*(1)} \triangleq \begin{bmatrix} q_2^1 & q_3^1 & q_4^1 & q_5^1 \end{bmatrix}^T = -q^{*(0)}$$

il est aisé de vérifier que les remplacements de  $q^*$  par  $-q^*$  laissent inchangées les valeurs absolues des coefficients dynamiques.

L'obtention des coefficients relatifs à la configuration  $q^{(2)}$  se fait en considérant la configuration  $q^{(4)} \in \bar{\mathfrak{D}}_q$  (symétrie par rapport à  $\mathfrak{F}_2$ )  $q^{*(4)}$  étant lié à  $q^{*(2)}$  par

$$q^{*(4)} \triangleq \begin{bmatrix} q_2^4 & q_3^4 & q_4^4 & q_5^4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T - q^{*(2)}$$

on vérifie que le remplacement de  $q^{*(2)}$  par  $q^{*(4)}$  ne modifie guère les valeurs absolues des coefficients dynamiques.



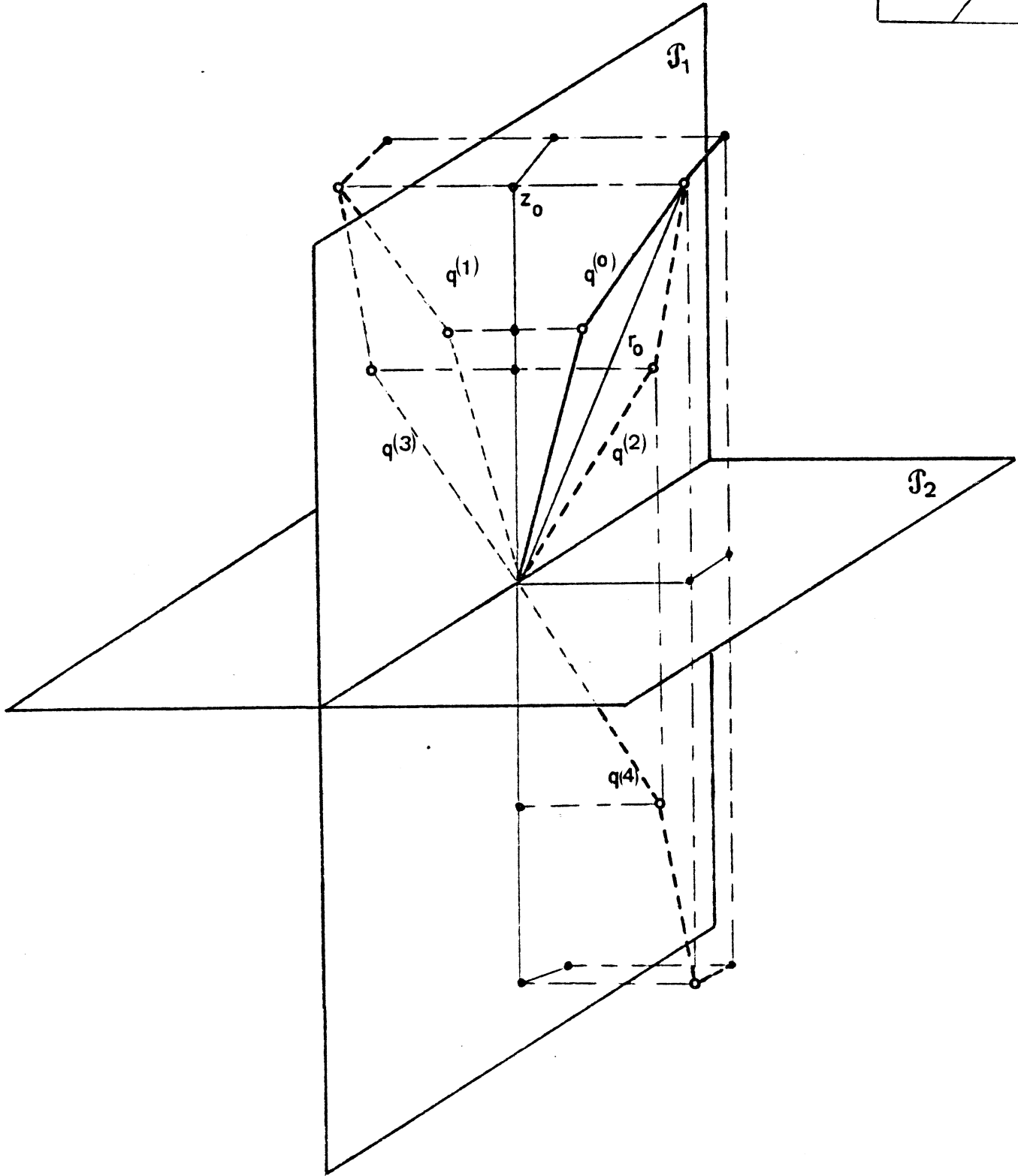
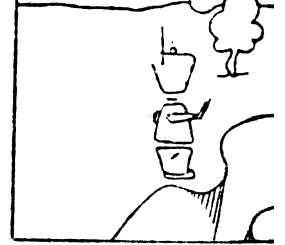
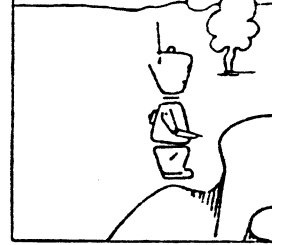


FIGURE 3.10 : Description des configurations  $q^{(0)} - q^{(4)}$





En remarquant enfin que  $q^{(3)}$  conduit par deux symétries successives ( $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ ) à  $q^{(4)}$  on peut conclure qu'à partir de leurs valeurs dans  $\bar{\mathcal{D}}_q$  les coefficients dynamiques s'obtiennent en valeurs absolues pour toute configuration de  $\mathcal{D}_q$ ; la détermination de leurs signes se fait aisément en utilisant les équations de mouvement.

Le développement en utilisant le couple  $(z,r)$  peut alors dans le cas général être utilisé en considérant l'évolution du système dans  $\bar{\mathcal{D}}_q$ .

Désignons par  $\Xi(q^*)$  la matrice colonne regroupant l'ensemble des coefficients dynamiques du système. Pour un mécanisme à 6 degrés de liberté, chacun des coefficients s'écrit :

$$\Xi^i(q^*) \triangleq \Xi^i(q_2, q_3, q_4, q_5)$$

Différentes solutions pour la mémorisation de  $\Xi^i$  peuvent être envisagées. Retenons notamment celles qui consistent à considérer  $\Xi^i$  comme une fonction à trois, à deux ou à une variable, paramétrée par rapport à la (aux) variable(s) restante(s). Par exemple,

$$\Xi_{q_5}^i(q_2, q_3, q_4) \quad \Xi_{q_4, q_5}^i(q_2, q_3) \quad \text{ou} \quad \Xi_{q_3, q_4, q_5}^i(q_2)$$

Pour la première solution, (i.e. telle que  $\Xi_{q_5}^i(q_2, q_3, q_4)$ ) l'approximation se fait par rapport à trois variables (ici  $q_2, q_3$  et  $q_4$ ) et les coefficients de cette approximation seront calculés pour  $N$  configurations de la variable par rapport à qui le coefficient dynamique est paramétré (ici  $q_5$ ).  $N$  étant le nombre de niveaux de quantification adopté.

Les coefficients de l'approximation à deux variables, pour la seconde solution, doivent être calculés pour  $N^2$  configurations. Ce nombre est de  $N^3$  pour la troisième solution.

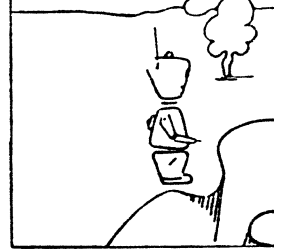
Pour une précision donnée, le nombre de  $N$  de niveau de quantification nécessaire varie suivant le système et le paramètre considéré. M.H.Raibert [RAI77] a estimé que ce nombre reste compris entre cinq et douze. Un nombre  $N=8$  fut adopté pour la tabulation des coefficients dynamiques relatifs aux mouvements articulaires du Stanford Scheinman Arm.

Si la propriété (3.6) peut être également utilisée dans ce cas pour réduire ce nombre, les résultats enregistrés dans le cas du robot vertical 80 montrent que l'obtention d'une précision satisfaisante exigerait une quantification plus fine qui semble devoir principalement porter sur les trois premiers paramètres.

En tenant compte de ces éléments nous avons effectué une extrapolation des résultats obtenus en considérant les trois premiers degrés de liberté à l'ensemble de ses mouvements.

Le nombre de coefficients de l'approximation, le nombre d'opérations arithmétiques (avec une estimation relative sur calculateur T 1600) et la place mémoire nécessaire pour chaque coefficient dynamique  $\underline{z}^i(q)$  sont comparés (cf tableau 3.11) pour les principales solutions que nous avons examinées : tabulation (1), approximation monovariable (2), développement en polynomes de Legendre au degré trois (3,5,7) et approximation à l'ordre 3 utilisant le couple de variables  $z$  et  $r$  (4,6,8).

Cette comparaison fait apparaître le gain important qu'offre la solution que nous avons développée.

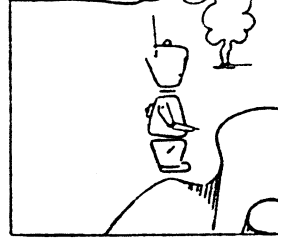


Numéro de Solutions	Nombre de coefficients	Nombre d'opérations	Temps de calcul (T 1600)	PLACE mémoire
1 - $\Xi^1$ $q_2, q_3, q_4, q_5$	-	-	-	4 K mots
2 - $\Xi^1$ ( $q_2$ ) $q_3, q_4, q_5$	4	6	1/30 ms	2 K mots
3 - $\Xi^1$ ( $q_2, q_3$ ) $q_4, q_5$	16	30	1/6 ms	1 K mot
4 - $\Xi^1$ ( $z, r$ ) $q_4, q_5$	10	18	1/10 ms	640 mots
5 - $\Xi^1$ ( $q_2, q_3, q_4$ ) $q_5$	64	126	0.7 ms	512 mots
6 - $\Xi^1$ ( $z, r, q_4$ ) $q_5$	19	36	0.2 ms	152 mots
7 - $\Xi^1$ ( $q_2, q_3, q_4, q_5$ )	256	510	2.8 ms	256 mots
8 - $\Xi^1$ ( $z, r, q_4, q_5$ )	31	60	1/3 ms	31 mots

TABEAU 3.11 : Comparaison entre les principales solutions d'approximation

Outre les difficultés numériques dans la résolution du problème de l'approximation (hors ligne), les solutions utilisant un grand nombre de variables conduisent rapidement à des temps élevés de calcul.

Les solutions (4) et (6) semblent constituer les deux compromis les plus intéressants. Sur la base de soixante coefficients dynamiques, ils représentent respectivement (6 ms/T1600 - 38 K mots) et (12 ms/T 1600 - 9 K mots).



### III.6 - GENERALISATION AUX DIFFERENTES REPRESENTATIONS DE L'ORIENTATION

Nous avons, au cours du premier chapitre, étudié différentes représentations redondantes de l'orientation et mis en évidence certaines propriétés qui ont permis d'apporter une contribution importante au niveau du problème de la transformation inverse de coordonnées. Ces propriétés sont ici à l'origine des présents développements.

Comme nous l'avons vu dans les précédents paragraphes, le robot manipulateur peut, lorsque la tâche est décrite à l'aide d'un système de coordonnées opérationnelles, être commandé de telle sorte que son organe terminal ait dans l'espace opérationnel le comportement dynamique désiré.

Toutefois, si l'adoption d'une représentation redondante interdit une telle possibilité, une solution autre que celle qui consiste à résoudre le problème de la transformation inverse et à commander le robot dans l'espace des coordonnées généralisées peut être obtenue lorsque la tâche est à *mouvement imposé*.

Cette solution est, en fait, contenue dans la loi de commande (3.91) qui fait apparaître la possibilité de commander le vecteur de vitesse de rotation  $\omega$  comme le montre l'équation (3.92) à laquelle il obéit. Se pose alors le problème d'obtenir l'évolution de ce vecteur qui correspond à l'évolution désirée de l'orientation ; cette dernière étant exprimée à l'aide des paramètres utilisés dans la représentation redondante adoptée.

Signalons, avant d'examiner ce problème que l'approche qui consiste à commander le vecteur  $\omega$  a été utilisée par R.PAUL et J.LUH [PAU79, LUH80] dans la commande du "Stanford Scheinman Arm". A ce propos, il convient de

rappeler que le système de commande utilisé possède, comme nous l'avons noté au § III.3, la structure classique associée à la loi de commande (3.34) (cf figure 3.2). D'autre part, outre l'évolution désirée des cosinus directeurs sont considérés comme données en entrée du système, les deux vecteurs  $\omega_d(t)$  et  $\omega_q(t)$ .

Le problème se pose, en général, en termes d'évolutions désirées des paramètres représentatifs de l'orientation et c'est dans ce cadre que nous nous sommes placés.

Considérons la représentation  $G_{CD}(q)$  utilisant les cosinus directeurs et rappelons les relations (cf. chapitre I) :

$$(1.23) \quad \dot{R}(q) = \begin{bmatrix} \dot{e}_1^T & \vdots & \dot{e}_2^T & \vdots & \dot{e}_3^T \end{bmatrix}^T$$

$$(1.58) \quad \dot{R}(q) = E(q) \omega$$

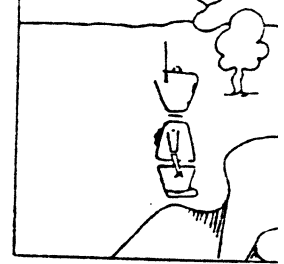
$E(q)$  étant la matrice  $9 \times 3$  :

$$(1.59) \quad E(q) = \begin{bmatrix} -\hat{e}_1 \\ \vdots \\ -\hat{e}_2 \\ \vdots \\ -\hat{e}_3 \end{bmatrix}$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation (1.58) permet d'écrire :

$$\ddot{R}(q) = \dot{E}(q) \omega + E(q) \dot{\omega} \quad (3.99)$$





Reprenons, afin de développer l'équation (3.99), les relations vectorielles (1.56). La dérivation par rapport au temps de ces dernières permet d'établir :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i^n}{dt^2} &= - i^n \wedge \dot{\omega} + (i^n \wedge \omega) \wedge \omega \\ \frac{d^2 j^n}{dt^2} &= - j^n \wedge \dot{\omega} + (j^n \wedge \omega) \wedge \omega \\ \text{et} \quad \frac{d^2 k^n}{dt^2} &= - k^n \wedge \dot{\omega} + (k^n \wedge \omega) \wedge \omega \end{aligned} \quad (3.100)$$

En remarquant que pour tout vecteur U et V, on a la propriété :

$$(U \wedge V) \wedge V = (U^T V) V - (V^T V) U \quad (3.101)$$

nous établissons la relation :

$$\ddot{R}(q) = E(q) \dot{\omega} + \nu(q, \omega) \omega - \omega^2 R(q) \quad (3.102)$$

où  $\omega^2 \triangleq (\omega^T \omega)$  et où  $\nu(q)$  est la matrice 3x3 définie par :

$$\nu(q, \omega) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{(e_1^T \omega) \omega \omega^T}{\omega^2} \\ \frac{(e_2^T \omega) \omega \omega^T}{\omega^2} \\ \frac{(e_3^T \omega) \omega \omega^T}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

La résolution en  $\omega$  et  $\dot{\omega}$  des équations (1.58) et (3.102) se fait aisément en utilisant l'inverse à gauche  $E^T(q)$  de  $E(q)$  (cf. rel. 1.75)

$$\omega = \frac{1}{2} E^T(q) \dot{R}(q) \quad (3.104)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2} E^T(q) \left[ \ddot{R}(q) - \nu(q, \omega) \omega + \omega^2 R(q) \right]$$

En remarquant la propriété :

$$E^T(q) R(q) = \hat{e}_1 e_1 + \hat{e}_2 e_2 + \hat{e}_3 e_3 = 0 \quad (3.105)$$

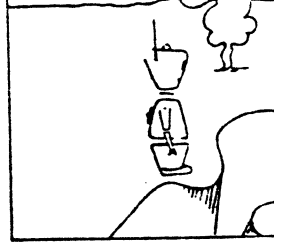
les équations (3.104) peuvent être développées et mises sous la forme :

$$\omega = \frac{1}{2} E^T(q) \dot{R}(q) \quad (3.106)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2} E^T(q) \ddot{R}(q) + \frac{1}{2} \nu^T(q, \omega) \dot{R}(q)$$

La matrice  $E(q)$  étant exprimée en fonction des cosinus directeurs les équations (3.106) permettent donc l'obtention des vecteurs  $\omega_d$  et  $\dot{\omega}_d$  correspondant à toute évolution désirée des cosinus directeurs donnée par  $R_d(q)$ ,  $\dot{R}_d(q)$  et  $\ddot{R}_d(q)$ .

Une loi de commande imposant une dynamique linéaire aux rotations angulaires fait intervenir l'écart en position angulaire  $\delta\phi = [\delta\phi_1 \ \delta\phi_2 \ \delta\phi_3]^T$



correspondant à l'écart  $\delta R = R(q) - R_d(q)$ . En réécrivant (1.58) sous forme variationnelle et en utilisant l'inverse à gauche  $E^T(q)$ ,  $\delta\phi$  s'écrit :

$$\delta\phi = \frac{1}{2} E^T(q) \delta R \quad (3.107)$$

La définition de l'écart  $R$  et la propriété (3.105) permettent d'établir

$$\delta\phi = -\frac{1}{2} E^T(q) R_d(q) \quad (3.108)$$

relation que l'on peut mettre sous la forme :

$$\delta\phi = -\frac{1}{2} (\bar{e}_1 e_{1d} + \bar{e}_2 e_{2d} + \bar{e}_3 e_{3d}) \quad (3.108bis)$$

Notons que sous cette forme, on retrouve l'écart en position angulaire utilisé par R.PAUL et J.LUH [PAU79, LUH80]. Cet écart adopté à partir de considérations indépendantes de toute représentation, retrouve ici, grâce à la relation (3.107) la signification qui lui revient.

En effet, l'écart en position angulaire a été [MAK76, PAU79, LUH80] recherché en considérant la rotation  $\psi$  autour d'un vecteur  $r$  permettant d'amener, à partir de sa configuration actuelle, le repère lié à l'organe terminal à une configuration désirée (cf figure 3.12), les composantes de cet écart sont obtenues en développant l'expression  $(\frac{1}{2} r \sin \psi)$

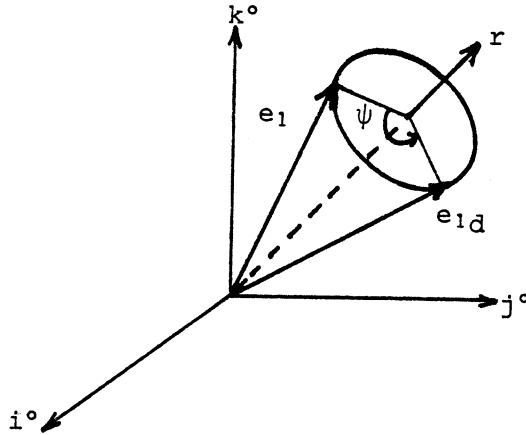


FIGURE 3.12 : Erreur d'orientation

Nous avons établi les relations permettant d'obtenir l'évolution des vecteurs  $\delta\phi(t)$ ,  $\omega_d(t)$  et  $\dot{\omega}_d(t)$  correspondante à une évolution désirée  $R(t)$ ,  $\dot{R}(t)$  et  $\ddot{R}(t)$  des cosinus directeurs.

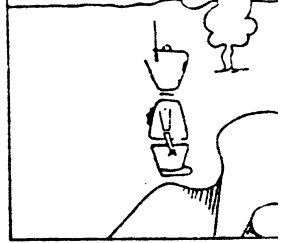
L'utilisation de la loi de commande (3.91) permet l'obtention d'une dynamique linéaire en  $\omega$ . D'après la relation (3.92), la loi de commande s'écrit :

$$\Gamma(t) = J_0^T(q^*) \tilde{\lambda}_0(q^*) F_m^*(t) + \tilde{B}_0(q^*) [\dot{q}\dot{q}] + \tilde{C}_0(q^*) [\dot{q}^2] - \tilde{H}(q^*) v(\bar{p}_1 q_1)$$

$$F_m^*(t) = \begin{bmatrix} F_{mL}^*(t) & F_{mR}^*(t) \end{bmatrix}^T$$

$$F_{mR}^*(t) = S^{01T} \left\{ \dot{\omega}_d(t) - \xi_\omega [\omega(t) - \omega_d(t)] - K_\omega \delta\phi(t) \right\}$$

$F_{mL}^*$  étant le vecteur des trois premières composantes de  $F_m^*$  concernant la position de l'organe terminal.



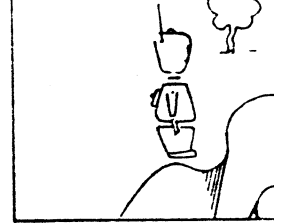
Pour les représentations utilisant deux vecteurs  $e_k$  et  $e_l$  parmi les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , on retrouve, en suivant la même démarche et en utilisant l'inverse à gauche  $E_{kl}^+$  à la place de  $E^+$ , des expressions similaires à celles que nous venons d'établir.

Aussi, l'utilisation de l'inverse à gauche de l'opérateur  $\check{\lambda}$  et de la relation :

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{2} \check{\lambda} \dot{\omega} - \frac{\omega^2}{4} \lambda$$

donnée en Annexe A3, permet quant à la représentation redondante utilisant les P.O.R. (cf § 1.61.) d'obtenir les expressions des trois vecteurs  $\dot{\omega}$ ,  $\omega$  et  $\delta\phi$  et d'utiliser par la suite la loi de commande (3.109).





### III.7 - EXTENSION AUX SYSTEMES REDONDANTS

Etant en nombre inférieur au nombre de degrés de liberté du manipulateur (i.e.  $m_0 < n$ ), les coordonnées opérationnelles ne sauraient former dans le cas de redondance, un système de coordonnées généralisées. Le comportement dynamique du manipulateur ne peut alors être décrit par un modèle dynamique élaboré dans l'espace opérationnel tel (3.14).

Un système d'équations décrivant le comportement dynamique dans l'espace opérationnel, de l'organe terminal peut, toutefois être obtenu et une loi de commande similaire à (3.38) permet, comme nous allons le montrer de réaliser le découplage des mouvements de l'organe terminal. La stabilité du système doit cependant être analysée à partir du seul modèle dynamique du système (3.1).

Le système est régi par les  $n$  équations (3.1) auxquelles nous adjoignons le système des  $m_0$  équations (3.35) ; soient :

$$(3.1) \quad A(q) \ddot{q} + b(q, \dot{q}) - g(q) = \Gamma$$

et

$$(3.35) \quad \ddot{x} = J(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q})$$

où

$$h(q, \dot{q}) = \dot{J}(q) \dot{q}$$

La matrice d'énergie cinétique  $A(q)$  étant régulière, le système (3.1) s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \{ \Gamma - \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \} \quad (3.110)$$

La transposition dans l'espace opérationnel des équations (3.110) qui s'obtient à l'aide de la relation (3.35) conduit au système de  $m_0$  équations régissant les mouvements de l'organe terminal soumis aux forces opérationnelles  $\mathbf{F}$  ; soit :

$$\ddot{\mathbf{X}} = \bar{\Lambda}_r(\mathbf{q}) \mathbf{F} - \eta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \beta(\mathbf{q})$$

où

$$\bar{\Lambda}_r(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \quad (3.111)$$

$$\eta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

et

$$\beta(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

En remarquant qu'en dehors des singularités, la matrice  $\Lambda_r(\mathbf{q})$  ( $m_0 \times m_0$ ) est régulière et définie positive, le système (3.111) peut être développé sous une forme identique au modèle dynamique (3.14) soit :

$$\Lambda_r(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{X}} + \mu_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{p}_r(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (3.112)$$

avec

$$\Lambda_r(\mathbf{q}) \triangleq \left[ \bar{\Lambda}_r(\mathbf{q}) \right]^{-1} = \left[ \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \right]^{-1} \quad (3.113)$$

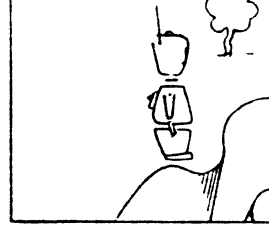
$$\mu_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \Lambda_r(\mathbf{q}) \eta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Lambda_r(\mathbf{q}) \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.114)$$

et

$$\mathbf{p}_r(\mathbf{q}) \triangleq \Lambda_r(\mathbf{q}) \beta(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.115)$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  est la matrice :





$$\bar{J}(q) \triangleq A^{-1}(q) J^T(q) \Lambda_r(q) \quad (3.116)$$

$\bar{J}(q)$  est en fait une pseudo inverse à droite de la matrice jacobienne  $J(q)$   $\bar{J}(q) = \Pi_{m_0}$ . il est alors aisé de vérifier que lorsque le degré de redondance  $n-m_0$  tend vers zéro, les équations (3.113-115) deviennent identiques aux équations respectives (3.17) et 3.23-24) obtenues dans le cas des systèmes non redondants. Le système (3.112) est dans ces conditions identique à celui de (3.14).

Dans le cas considéré des systèmes redondants, la matrice  $\Lambda_r(q)$  (3.AA3) apparait comme une "pseudo matrice d'énergie cinétique" jouant un rôle similaire à la matrice  $\Lambda(q)$  (3.17).

Le découplage des mouvements de l'organe terminal se fait en procédant de la même manière que dans le cas non redondant. Toutefois, le vecteur de commande étant  $\Gamma$ , la compensation au niveau du système (3.112) des effets des forces  $|b(q, \dot{q}) - g(q)|$  peut être directement obtenue par l'imposition de forces généralisées appropriées (cf équ. 3.110). En sélectionnant la loi de commande :

$$\Gamma = J^T(q) F_0 + b(q, \dot{q}) - g(q) \quad (3.117)$$

les équations de mouvement de l'organe terminal s'écrivent :

$$\Lambda_r \ddot{X} - \Lambda_r(q) h(q, \dot{q}) = F_0 \quad (3.118)$$

Le découplage du système (3.118) est immédiat et la loi de commande en terme de forces généralisées s'écrit :

$$\Gamma = J^T(q) \Lambda_r(q) F_m + \tilde{B}_r(q) [\dot{q}\dot{q}] + \tilde{C}_r(q) [\dot{q}^2] - g(q) \quad (3.119)$$

$$\tilde{B}_r(q) \triangleq B(q) - J^T(q) \Lambda_r(q) H_1(q) \quad (3.120)$$

$$\tilde{C}_r(q) \triangleq C(q) - J^T(q) \Lambda_r(q) H_2(q)$$

$F_m$  étant l'entrée du système (3.112) découplé (cf rel. 3.27-28).

Lorsque la représentation de l'organe est effectuée à l'aide du modèle géométrique (3.54) utilisant les angles d'Euler, les matrices  $\Lambda_r(q)$ ,  $\tilde{B}_r(q)$  et  $\tilde{C}_r(q)$  possèdent un ensemble de propriétés similaires aux propriétés (3.1) des matrices  $\Lambda_E(q)$ ,  $\tilde{B}_E(q)$  et  $\tilde{C}_E(q)$  (cf rel. 3.80-82)

En effet, les propriétés (3.56) et (3.67) relatives à la matrice jacobienne  $J_E(q)$  ont été obtenues dans le cas général de systèmes redondants elles permettent aisément d'établir :

### Propriété 3.7

$$\Lambda_{Er}(q) = \Omega_E^*(\rho_1 q_1) \tilde{\lambda}_{Er}(q^*) \Omega_E^{*T}(\rho_1 q_1) \quad (3.121)$$

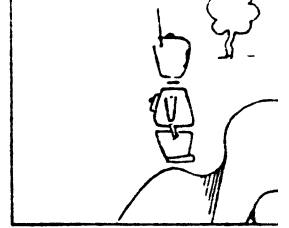
où

$$\tilde{\lambda}_{Er}(q^*) = \left[ J_E^*(q^*) A^{-1}(q^*) J_E^{*T}(q) \right]^{-1}$$

$$\tilde{B}_{Er}(q) = \tilde{B}_{Er}(q^*) = B(q^*) - J_E^{*T}(q^*) \tilde{\lambda}_{Er}(q^*) H_{E1}^*(q^*) \quad (3.122)$$

et

$$\tilde{C}_{Er}(q) = \tilde{C}_{Er}(q^*) = C(q^*) - J_E^{*T}(q^*) \tilde{\lambda}_{Er}(q^*) H_{E1}^*(q^*) \quad (3.123)$$



avec

$$(3.53) \quad g(q) = \hat{H}(q^*) \quad v(\bar{\rho}_1 q_1)$$

L'utilisation de ces propriétés permet de mettre la loi de commande (3.84) sous la forme :

$$\Gamma = J_E^T(q^*) \hat{\Lambda}_r(q^*) F_m^* + \hat{B}_{Er}(q^*) [\dot{q}\dot{q}] + \hat{C}_{Er}(q^*) [\dot{q}^2] - \hat{H}(q^*) v(\bar{\rho}_1 q_1)$$

avec

(3.124)

$$F_m^* = \Omega_E^T(\bar{\rho}_1 q_1) F_m$$

Cependant, si cette loi de commande permet d'assurer la stabilité asymptotique de l'organe terminal, elle ne saurait le faire au niveau des mouvements articulaires du système.

En effet, aux forces d'amortissement en  $\dot{\chi}$  intervenant dans  $F_m^*$  (cf rela. 3.27-28) correspond, dans le cas des systèmes redondants, les forces dissipatives :

$$\Gamma_D = D(q) \dot{q} \quad (3.125)$$

avec

$$D(q) = J^T(q) \hat{\Lambda}(q) J(q)$$

$D(q)$  est une matrice d'ordre  $n$  et de rang  $m_0$  définie non négative. L'inégalité

$$\dot{q}^T D(q) \dot{q} \leq 0 \quad (3.126)$$

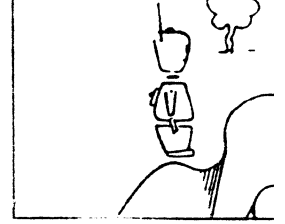
assurant la stabilité du système mécanique [MIN70] est satisfaite.

$D(q)$  étant de rang  $m_0 < n$ , le système est susceptible de décrire, dans l'espace des coordonnées généralisées, des mouvements solution de l'équation [RUM70] :

$$\dot{q}^T D(q) \dot{q} = 0 \quad (3.127)$$

Disposant des commandes en forces généralisées, ce problème est résolu par l'adjonction de forces dissipatives en  $\dot{q}$ .

Dans la pratique, les coefficients d'amortissement en  $\dot{q}$  peuvent être choisis très peu élevés et les amortissements naturels du système restent, en général, largement suffisants [KHA78B]. L'introduction de ces forces n'aura donc pas d'influence notable sur le comportement dynamique de l'organe terminal.



### III.8 - CONCLUSION

Nous avons, après élaboration du modèle dynamique régissant les mouvements de l'organe terminal, examiné le problème posé par la mise en oeuvre d'une commande assurant le découplage de ces mouvements.

Une structure nouvelle de système de commande a été présentée et une étude développée au niveau de ses composantes a été menée. Cette étude conduite dans le cas des deux systèmes de coordonnées opérationnelles présentés dans le premier chapitre, a permis de dégager nombre de propriétés des coefficients dynamiques intervenant dans la commande. Ce qui a rendu envisageable l'utilisation de l'approche de la mémorisation de ces coefficients.

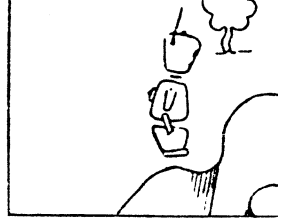
L'étude menée à ce niveau a montré les avantages d'une approximation multivariable par rapport à une tabulation issue d'une quantification de l'espace de configuration. La mise en évidence d'une importante propriété concernant l'évolution des coefficients dynamiques d'un robot manipulateur, a permis de dégager plusieurs solutions présentant des compromis intéressants entre "place mémoire-volume de calcul et précision".

L'approche de la commande dynamique dans l'espace opérationnel a été étendue par la suite, aux différents systèmes de représentation de l'orientation ; et une relation importante concernant l'erreur de l'orientation et les variations des cosinus directeurs a été établie.

Le dernier paragraphe de ce chapitre a été consacré à l'extension de cette approche de commande au cas des systèmes redondants.

En faisant apparaître la matrice jacobienne (transposée) qui établit, rappelons-le, la relation en forces opérationnelles et forces généralisées, il devient aisé d'adjoindre au système de commande une chaîne permettant de répondre aux tâches faisant intervenir les forces et couples à exercer par l'organe terminal [CRA79].

Une application de cette approche de commande est actuellement en cours d'implantation sur le robot vertical 80 [LLI81].



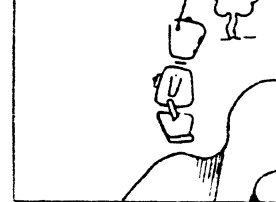
## **CHAPITRE IV**

---

### **PRISE EN COMPTE DES OBSTACLES ET DES CONTRAINTES STRUCTURELLES**







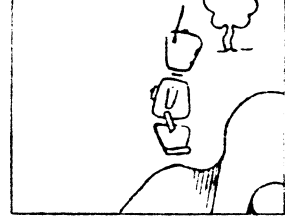
## IV.1 - INTRODUCTION

Dans un schéma fonctionnel d'un robot évolué, le système de commande que nous avons jusqu'ici considéré se situe au niveau hiérarchique le plus bas dit *niveau d'exécution*. Son rôle est d'élaborer les commandes à appliquer aux actionneurs répondant à la tâche spécifiée par un niveau hiérarchique supérieur. Une telle tâche s'intègre en fait dans une séquence de tâches élémentaires correspondant à une opération qui, elle aussi, peut faire partie d'une suite d'opérations répondant à un objectif global auquel le robot est assigné.

Confronté à son environnement et à ses propres contraintes structurelles, le robot est amené, chaque fois qu'il y a incompatibilité de la tâche en cours avec sa configuration dans l'environnement, à opérer une *réflexion* lui permettant de réagir en conséquence.

Une approche nouvelle conférant une large autonomie au système de commande placé au niveau d'exécution est présenté dans ce chapitre. En permettant d'éviter le recours en permanence aux niveaux hiérarchiques supérieures, cette approche conduit à alléger considérablement leur charge.





## IV.2 - SYSTEME DE COMMANDE ADAPTATIF

Considérons le problème de faire évoluer à partir de sa configuration initiale, l'effecteur d'un robot manipulateur afin de l'amener à une configuration désirée, le système étant supposé opérer dans un environnement encombré d'obstacles.

L'idée de base de l'approche que nous proposons consiste schématiquement à faire en sorte que :

*Le robot manipulateur évolue dans un champ de forces où la position finale à atteindre joue le rôle d'un pôle attractif pour l'extrémité de l'organe terminal et dans lequel les obstacles sont assimilés à des surfaces répulsives pour l'ensemble des éléments constitutifs de sa structure.*

Les forces assignant au point final à atteindre le rôle d'un pôle attractif étant contenue dans le vecteur de commande en force opérationnelle  $F_m$  (cf § 3.3) reste à déterminer les forces permettant la prise en compte des obstacles et des contraintes structurelles du système.

Les obstacles seront décrits par des surfaces approchant leurs formes et le contrôle vis à vis d'un obstacle, d'un point donné du système sera réalisé en le soumettant à une Force Induisant une Répulsion Artificielle de Surface (FIRAS). Ces forces seront créées par l'imposition à partir des équations analytiques de ces surfaces, de potentiels artificiels agissant au niveau de point du système.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la modélisation de l'environnement et au développement des équations analytiques de surfaces.

#### 4.2.1 - MODELISATION DE L'ENVIRONNEMENT

Il convient tout d'abord de noter qu'il s'agit ici d'un modèle propre au niveau d'exécution de la commande et que les éléments qu'il utilise s'obtiennent dans le cas d'un robot évolué, à partir de la représentation de l'univers adoptée au niveau hiérarchique supérieur.

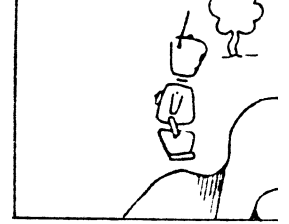
Nous utiliserons le terme "objet" pour désigner tout ce qui se trouve dans l'environnement du robot ; pour un objet donné, cette modélisation a pour but l'obtention d'un certain nombre d'équations analytiques permettant la définition d'une enveloppe qui approche au mieux la forme de l'objet.

Les méthodes de description d'objets montrent qu'une vaste classe d'objets de formes complexes peut être décrite à partir de la composition (Union, Soustraction, Addition) d'un certain nombre d'objets de forme simple que l'on nomme "primitive" [BRA75, CAZ77].

Nous verrons plus loin que l'opération de soustraction ne peut dans notre cas être utilisée.

Désignons par  $\theta^*$  l'ensemble d'objets dont les éléments s'obtiennent à partir de la décomposition de primitives, sans faire appel à l'opération de soustraction. Notons qu'un objet  $\theta_1$  nécessitant l'utilisant de cette opération i.e.  $\theta_1 \in \theta^*$  peut être développée sous la forme :

$$\theta_1 = \theta_1^P - \sum_{k=1}^{m_1} \theta_k^V \quad ; \quad \theta_1^P, \theta_k^V \in \theta^* \quad (4.1)$$



Un objet  $\theta_i \in \Theta^*$  sera décrit par un ensemble  $E_i$  de  $n_i$  équations représentant les surfaces élémentaires qui l'enveloppent :

$$E_i \triangleq \left\{ f_i^j (x, y, z) = 0 ; j = 1, n_i \right\} \quad (4.2)$$

Voici quelques équations analytiques de surfaces approximant les principales primitives que nous avons examinées :

$$\left( \frac{x - x_0}{a} \right)^8 + \left( \frac{y - y_0}{b} \right)^8 + \left( \frac{z - z_0}{c} \right)^8 = 1 \quad \text{pour un parallélépipède}$$

$$\left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left( \frac{y - y_0}{b} \right)^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{z - z_0}{c} \right)^8 + \left( \frac{z - z_0}{c} \right)^7 - \left( \frac{z - z_0}{c} \right) + 1 \right) \right]^2 = 1 \quad \text{pour un cône} \quad (4.3)$$

$$\left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left( \frac{y - y_0}{a} \right)^2 + \left( \frac{z - z_0}{c} \right)^8 = 1 \quad \text{pour un cylindre de côte } c$$

#### 4.2.2 - FONCTION DE FIRAS

A partir de l'ensemble  $E_i$  de  $n_i$  équations analytiques décrivant un objet  $\theta_i \in \Theta^*$ , nous définissons l'ensemble :

$$\mathcal{A}_i = \left\{ f_i^j (x, y, z) ; j = 1, n_i \right\} \quad (4.4)$$

de  $n_i$  applications  $f_i^j$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction de FIRAS à associer à la surface  $f_i^j(x, y, z) = 0$  sera considérée comme le gradient d'une fonction potentielle  $V_i^j(x, y, z)$  possédant les propriétés :

i)  $V_i^j(x, y, z)$  est une fonction à gradient continue sur  $\mathbb{R}^3 - \{x, y, z ; f_i^j(x, y, z) = 0\}$

ii)  $V_i^j(x, y, z)$  est définie non négative

iii) Lorsque  $f_i^j(x, y, z)$  tend vers zéro le potentiel  $V_i^j(x, y, z)$  tend vers l'infini.

Muni de ces propriétés, la fonction  $V_i^j(x, y, z)$  définit sur la surface  $f_i^j(x, y, z) = 0$  une barrière de potentiel au delà de laquelle la fonction  $V_i^j(x, y, z)$  tend vers une valeur nulle.

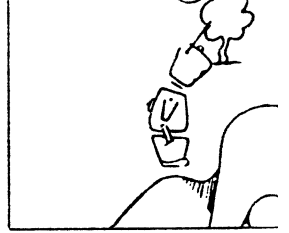
Toutefois, l'adjonction des forces dérivant d'un tel potentiel, aux forces devant permettre d'atteindre la position désirée conduit à déplacer légèrement la position d'équilibre du système ; ceci étant dû aux valeurs non nulles du potentiel  $V_i^j(x, y, z)$ .

Ce problème est résolu en imposant au potentiel  $V_i^j(x, y, z)$  la propriété :

IV) Etant donné un point  $M(X_0, Y_0, Z_0)$  tel que :

$$f_i^j(X_0, Y_0, Z_0) \neq 0$$

le potentiel  $V_i^j(X, Y, Z)$  est identiquement nul dans le domaine  $\mathcal{D}_{ij}^0$  défini par :



$$\mathcal{D}_{ij}^{\circ} \triangleq \left\{ x, y, z ; \left| f_i^j(x, y, z) \right| > \left| f_i^j(x_0, y_0, z_0) \right| \right\}$$

Cette propriété permet de définir au voisinage de l'obstacle une surface à l'intérieur ou à l'extérieur de laquelle le potentiel  $V_i^j(x, y, z)$  est nul.

On peut pour un point  $M(x_0, y_0, z_0)$  donné, choisir le potentiel :

$$V_i^j(x, y, z) = \left[ 1/f_i^j(x, y, z) - 1/f_i^j(x_0, y_0, z_0) \right]^2 \quad (4.5)$$

$$\text{pour } \left| f_i^j(x, y, z) \right| < \left| f_i^j(x_0, y_0, z_0) \right|$$

et

$$V_i^j(x, y, z) = 0 \quad \text{pour } \left| f_i^j(x, y, z) \right| > \left| f_i^j(x_0, y_0, z_0) \right|$$

vérifiant les propriétés précitées. On vérifie notamment que les dérivées partielles de la fonction  $V_i^j(x, y, z)$  au voisinage du point  $M(x_0, y_0, z_0)$  sont toutes nulles à droite et à gauche.

En prenant la somme des potentiels obtenus à partir de l'ensemble  $\mathcal{A}_i$ , nous obtenons en chaque point de la surface enveloppant l'objet  $\theta_i$  une barrière infinie de potentiel. Désignons par  $V_i$  cette somme :

$$V_i(x, y, z) = \sum_{j=1}^{n_i} V_i^j(x, y, z) \quad (4.6)$$

En un point  $N_K(x_K, y_K, z_K)$  du robot, la fonction de FIRAS  $\mathcal{F}_{iR}$  correspondante à l'objet  $\theta_i$  est donnée par :

$$\mathcal{F}_{iR}(x_k, y_k, z_k) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} & \frac{\partial V_i}{\partial y_k} & \frac{\partial V_i}{\partial z_k} \end{bmatrix}^T \quad (4.7)$$

L'application de ces forces, lorsqu'il s'agit d'un robot manipulateur se fait en utilisant la matrice jacobienne associée au point soumis à ces forces (PSF), soit :

$$\mathcal{G}_{iR} = J_k^T(q) \mathcal{F}_{ik} \quad (4.8)$$

Un exemple d'illustration de l'application "en simulation" de ces forces au niveau de l'extrémité d'un manipulateur opérant dans un plan et possédant trois degrés de liberté ( $q_1$  : rotation,  $q_2$  : translation,  $q_3$  : rotation) est donné sur la figure (4.1). La tâche du système étant d'amener l'extrémité initialement positionnée en A à la position B en contournant l'obstacle représenté.

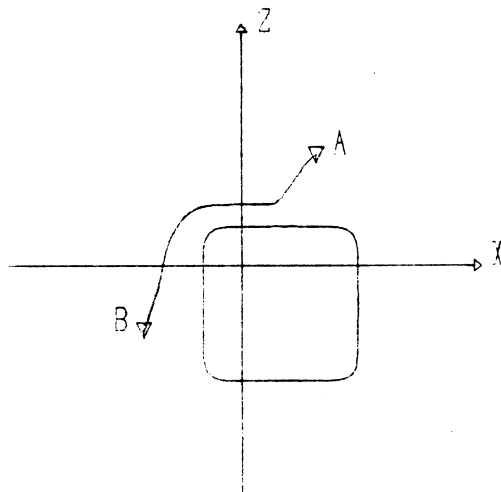
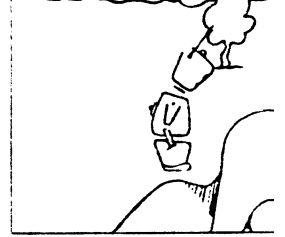


FIGURE 4.1 : Contournement d'un obstacle (ROTHET A2)





### REMARQUE

Pour les objets  $\theta_i \in \Theta^*$  ( $\theta = \theta_i^D - \sum_j \theta_j^V$  ;  $\theta_i^D \in \Theta$  ;  $\theta_j^V \in \Theta$ ) les surfaces approximant  $\theta_i^D$  et  $\theta_j^V$  étant, en général non confondues, la soustraction des potentiels associés ne permet donc pas d'obtenir une barrière infinie de potentiel sur l'enveloppe relative à un tel objet.

Le choix de la fonction potentielle (4.5) conduit lors de l'utilisation d'une primitive de dimensions disproportionnées, à une importante déformation du champ des forces.

Un choix intéressant de la fonction  $V_i^j(x, y, z)$  consiste à la définir à partir de la longueur  $\rho_{ij}$  de la normale à la surface  $f_i^j(x, y, z) = 0$ , soit

$$V_i^j(x, y, z) = (1 / \rho_{ij}^2 - 1 / \rho_{ij0}^2)^2 \text{ pour } |\rho_{ij}| < |\rho_{ij0}|$$

(4.9)

et

$$V_i^j(x, y, z) = 0 \text{ pour } |\rho_{ij}| > |\rho_{ij0}|$$

$\rho_{ij0}$  étant la longueur définissant la surface au delà de laquelle le potentiel  $V_i^j(x, y, z)$  s'annule. Cette surface s'obtient à partir de  $f_i^j(x, y, z) = 0$  par une transformation linéaire.

Le calcul des forces dérivant de ce potentiel pose cependant le problème de l'obtention de la longueur  $\rho_{ij}$ .

Ce problème a été simplement résolu en développant une procédure variationnelle de calcul initialisé à chaque passage par la surface sur laquelle le potentiel s'annule.

La prise en compte pour un PSF d'indice  $k$ , de plusieurs objets  $\theta_{i(k)}$  se fait par l'imposition des forces :

$$\Gamma_k^\theta = \sum_{i(k)} J_k^T(q) \mathcal{F}_{i(k)k} \quad (4.10)$$

De la même manière, le contrôle vis à vis de ces objets, de l'ensemble des éléments constitutifs d'un robot manipulateur se fait en définissant en nombre suffisant de P.S.F. Le vecteur des forces généralisées correspondant s'écrit :

$$\Gamma^\theta = \sum_{i,k} J_k^T(q) \mathcal{F}_{i(k)k} \quad (4.11)$$

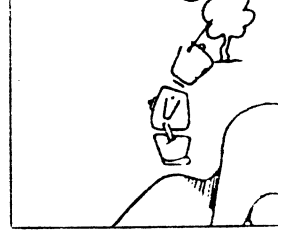
### "Prise en compte des contraintes structurelles"

Les débattements des coordonnées généralisées étant limités, l'évolution du système est soumise à des contraintes de type :

$$\underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En suivant l'approche que nous venons de développer, la prise en compte de ces contraintes se fait aisément, par la création au niveau des hypersurfaces :

$$q_i = \underline{q}_i \quad \text{et} \quad q_i = \bar{q}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.12)$$



de barrières infinies de potentiel et par l'adjonction des forces  $\Gamma^S$  dérivant de ces potentiels aux composantes correspondantes du vecteur de commande

Un exemple de prise en compte de saturation pour le manipulateur ROTHETA2 est donné sur la figure 4.2

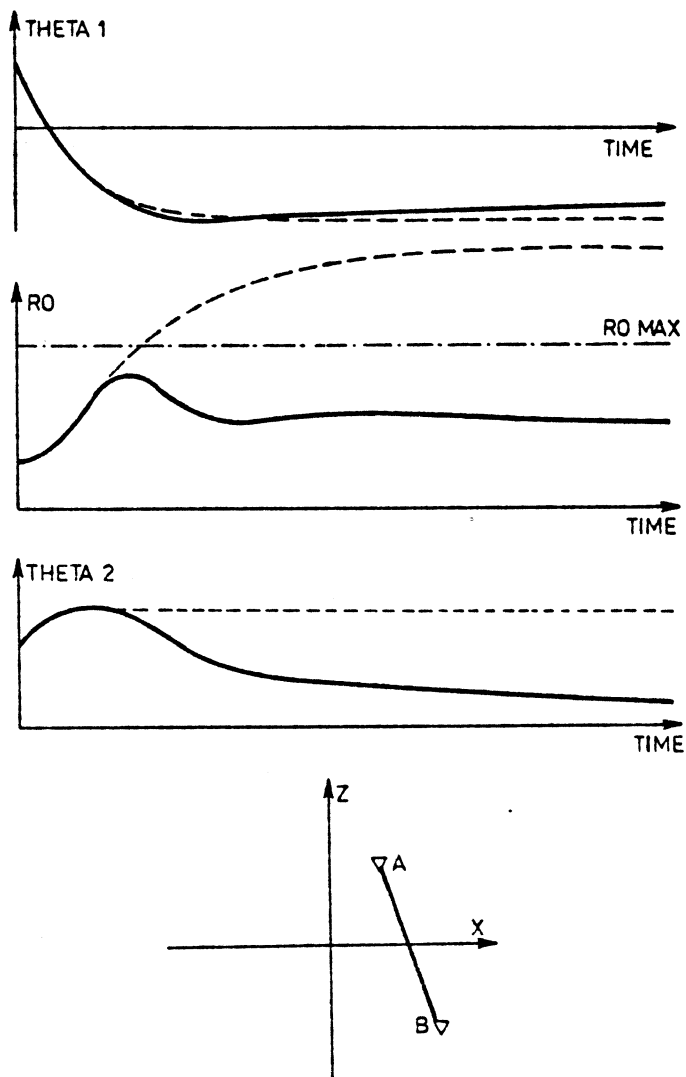


FIGURE 4.2 : Prise en compte d'une saturation

Le vecteur de commande s'obtient finalement par la somme des trois vecteurs :

$$\Gamma = \Gamma^E + \Gamma^S + \Gamma^\emptyset \quad (4.13)$$

relatifs au déplacement de l'extrémité, aux saturations et à la prise en compte des obstacles (cf figure 4.3).

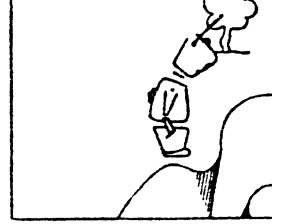
#### 4.3.3 - ORGANISATION DU SYSTEME DE COMMANDE

Cette approche peut dans certaines conditions amener à des états stables différents de l'état final imposé. Ces états correspondent à des minima locaux dans le champ potentiel.

La mise en place d'une procédure de déblocage consistant soit en une pondération appropriée des gains du potentiel attractif, soit en la définition des points objectifs intermédiaires permettra de résoudre un nombre important de cas de blocages. Les blocages majeurs qui ne pourront être résolus par une telle procédure seront du ressort du niveau hiérarchique supérieur.

En ce qui concerne les objets  $\theta_i \in \theta^*$  définis ( $\theta_i = \theta_i^D - \sum_j \theta_j^V$ ,  $\theta_i^D \in \theta^*$ ,  $\theta_j^V \in \theta^*$ ), deux cas peuvent se présenter :

- l'opération demandée ne fait pas intervenir les volumes  $\theta_j^V$  dans ce cas  $\theta_i^D$  sera pris à la place de  $\theta_i$



- le déplacement doit être effectué à l'intérieur d'un volume  $\theta_j^V$  ; dans ce cas, l'opération pourra être réalisée en plusieurs étapes au cours desquelles les objets  $\theta_i^P$  et  $\theta_j^V$  seront successivement pris ou non en compte.

L'élaboration d'autre part d'une procédure de prise en compte évolutive de l'environnement permet de réduire considérablement le volume du calcul, en se limitant aux seuls obstacles environnants.

Une telle procédure consiste à cerner pour une opération donnée les objets pouvant entrer en contact avec le manipulateur et à définir le nombre et les déplacements des PSF correspondants.

Cette organisation du système de commande est schématisée sur la figure (4.3).



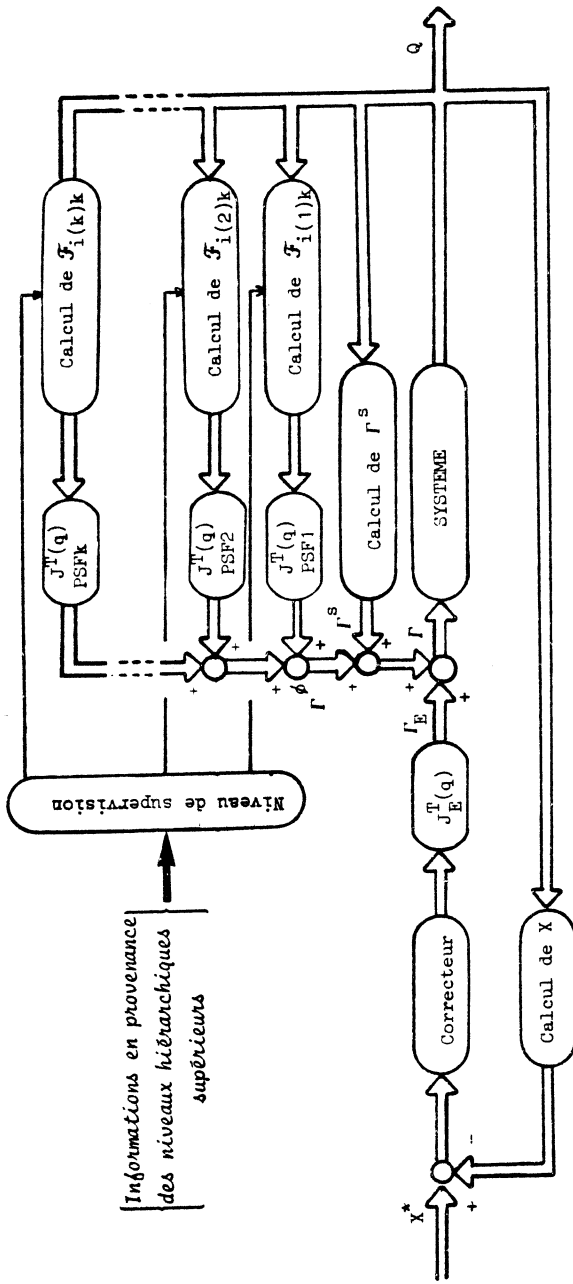
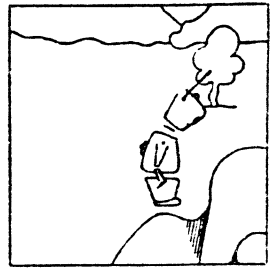
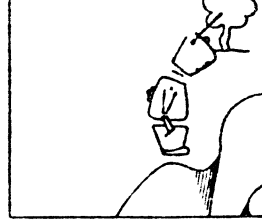


FIGURE 4.3 Système de Commande Adaptatif.

FIGURE 4.3







### IV.3 - EXEMPLES D'APPLICATIONS

L'efficacité de cette approche de prise en compte d'obstacles et de contraintes structurelles de robots est illustrée par deux exemples de systèmes en simulation.

Le premier est un robot manipulateur à 4 degrés de liberté, de type rotatif (ROTHETA4) opérant dans le plan. Il possède donc deux degrés de redondance vis à vis des tâches relatives au positionnement de son extrémité.

On visualise sur les épreuves portées sur la figure (4.4) une séquence de déplacement de ce robot à l'intérieur d'une enceinte.

La seconde application concerne l'évolution de deux robots mobiles dans un environnement parsemé d'obstacles. Chacun de ces robots est considéré comme un obstacle mobile vis à vis de l'autre. Les trois séquences représentées sur la figure 4.5 montrent la grande souplesse de cette approche.

#### NOTE

La position de l'objectif à atteindre est repérée par un triangle. La présence d'un triangle à l'intérieur d'un obstacle signifie que celui-ci est pris en compte par un ou plusieurs P.S.F.



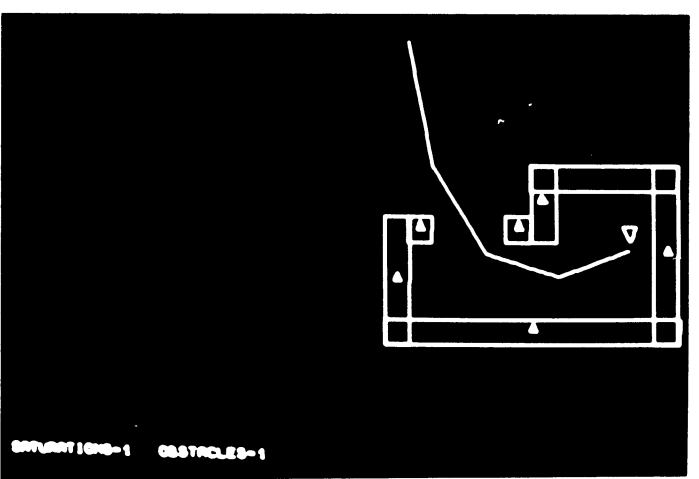
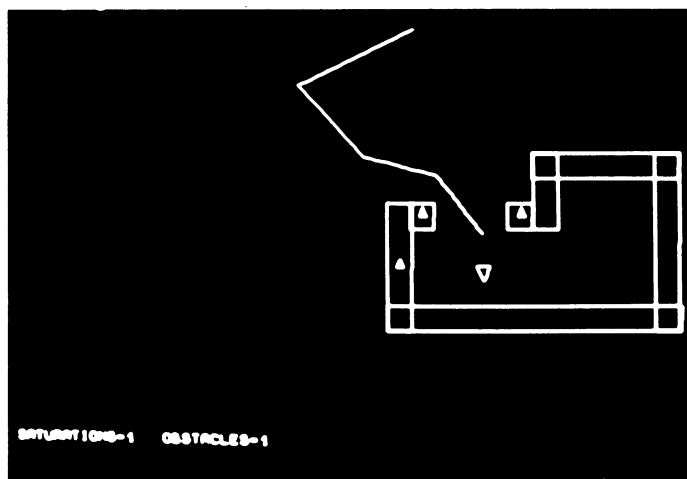
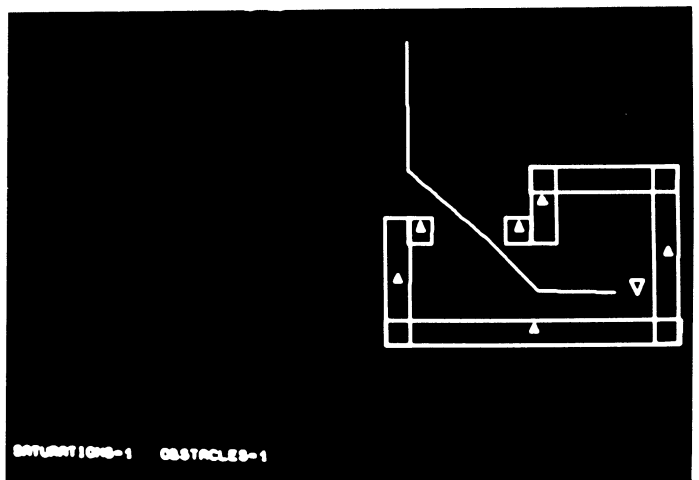
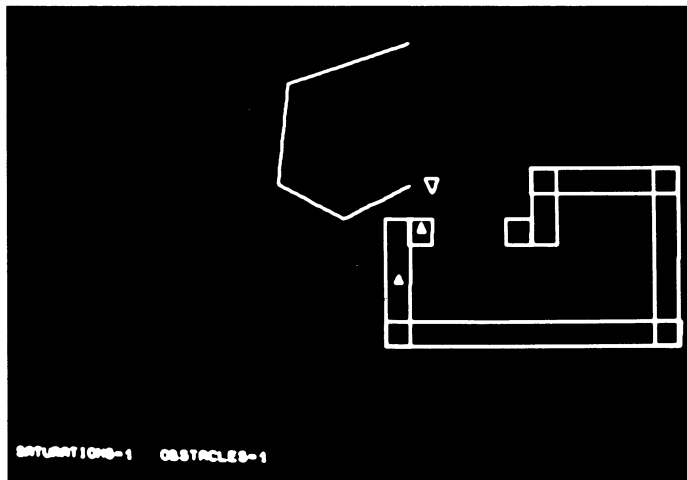
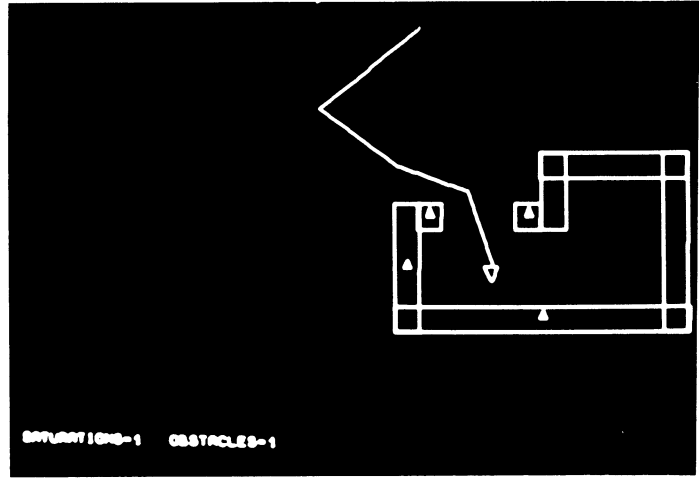
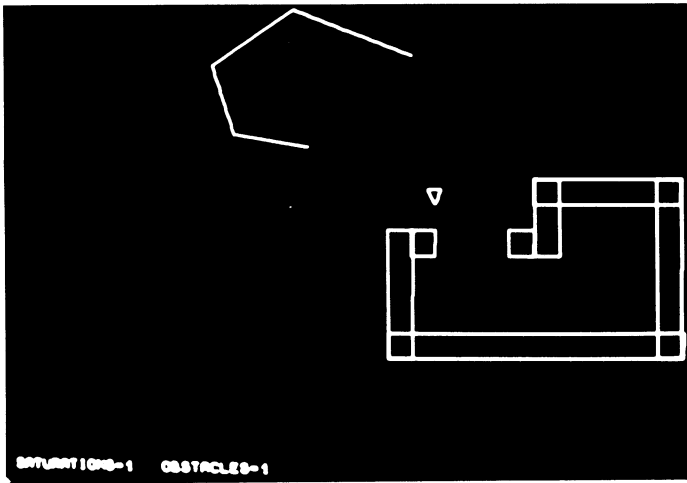
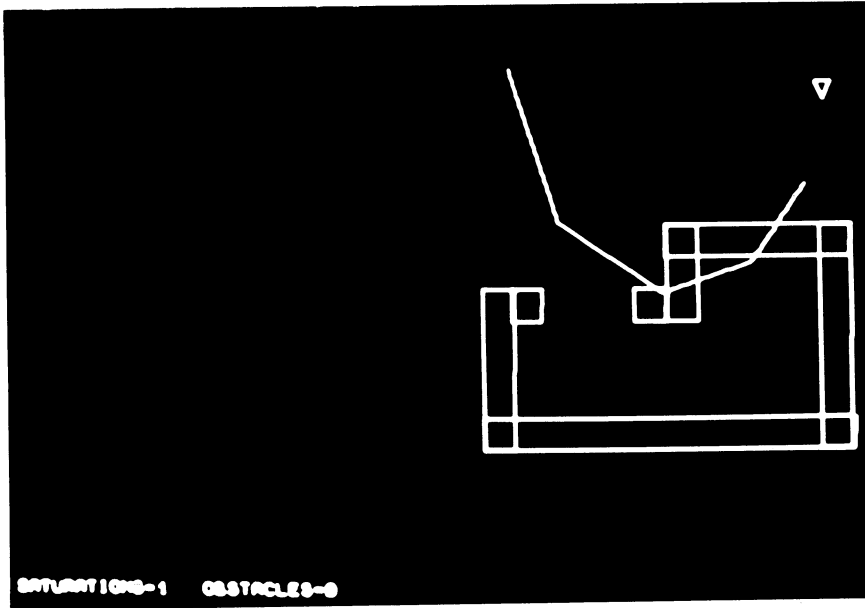


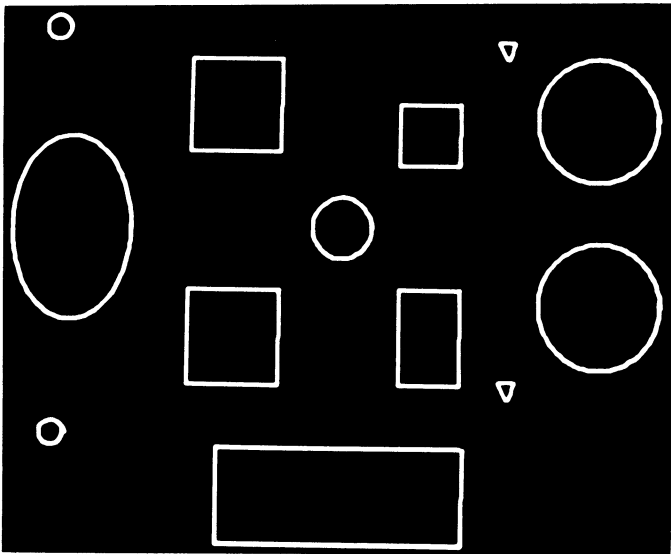
Figure 4.4 : Déplacement du manipulateur THETA 4 à l'intérieur d'une enceinte .



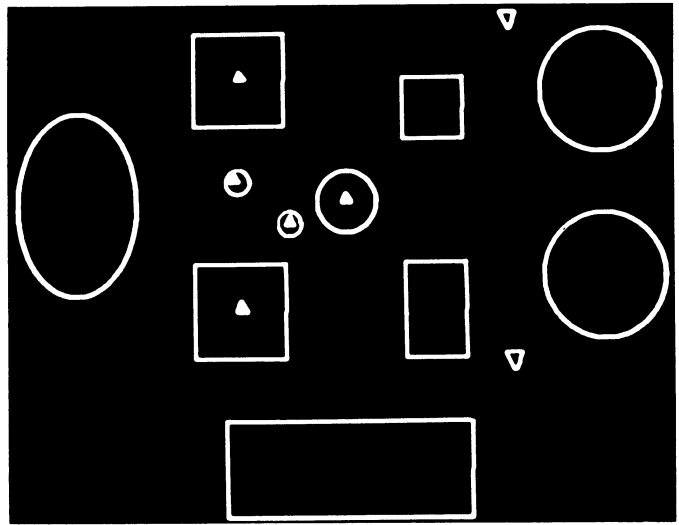


Déplacement sans prise en compte des obstacles

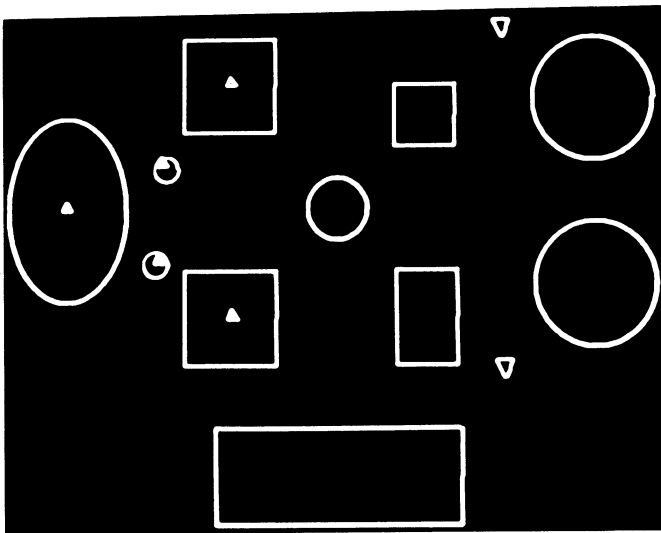




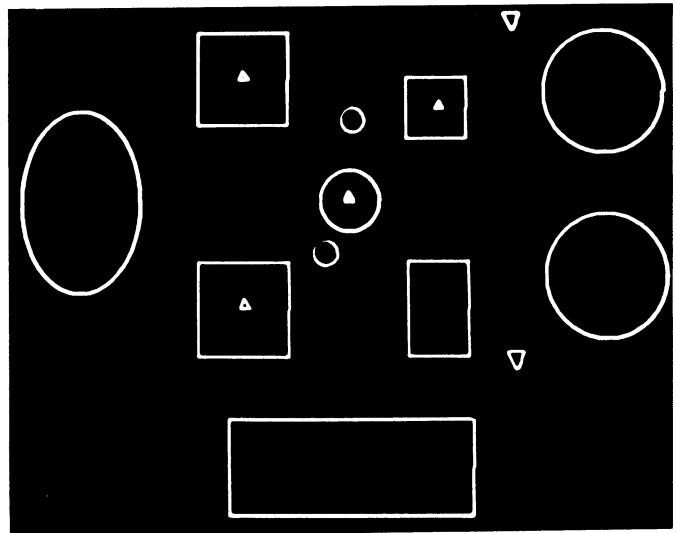
1



3



2

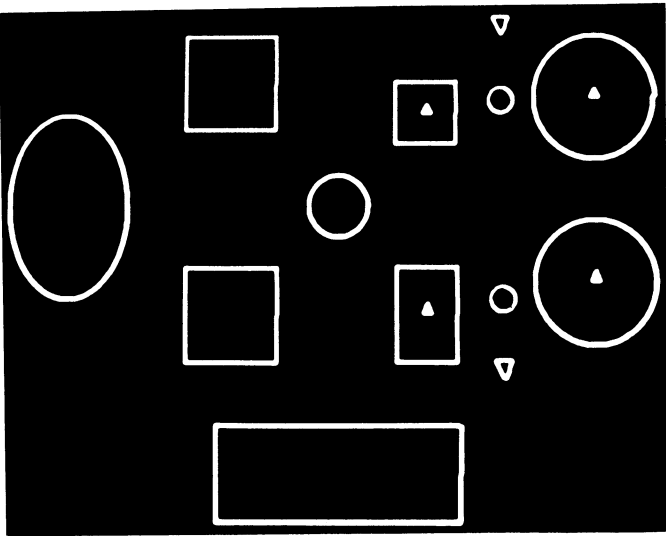


4

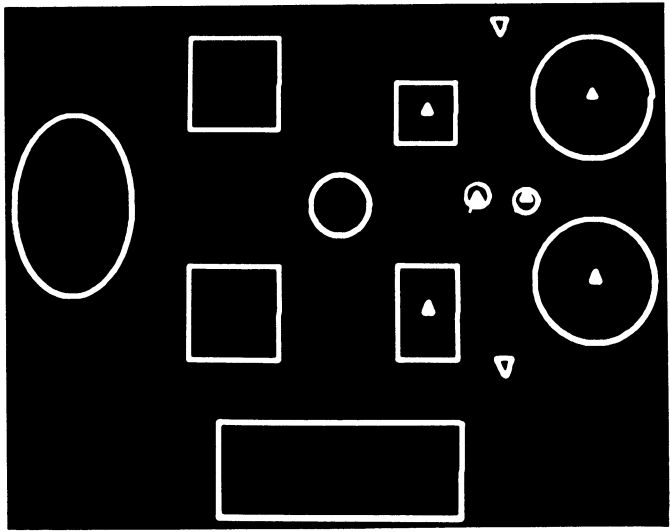
Figure 4.5 : Déplacement de deux Robots mobiles (1<sup>ère</sup> séquence )



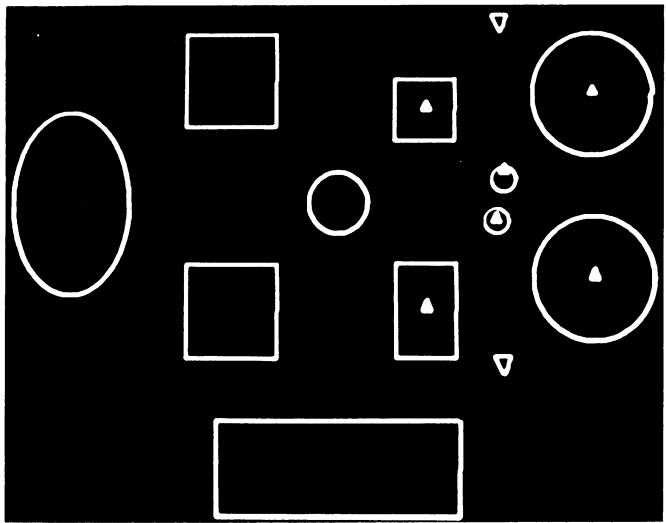




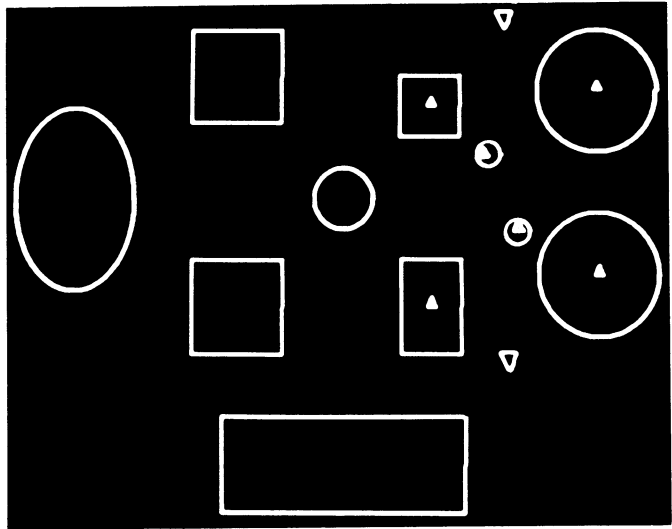
1



3



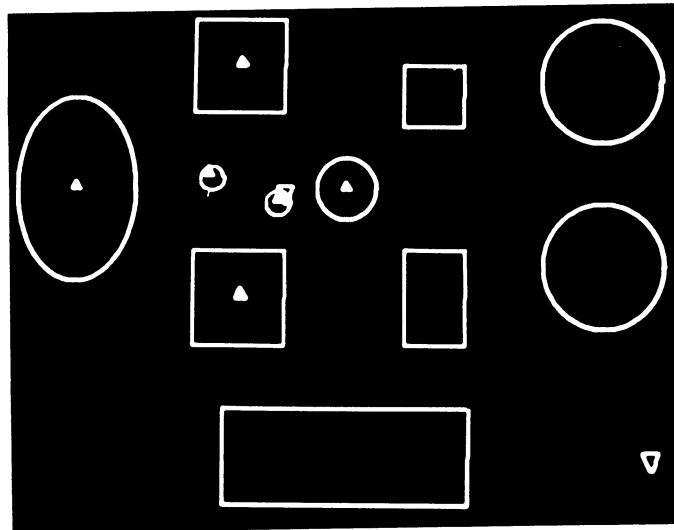
2



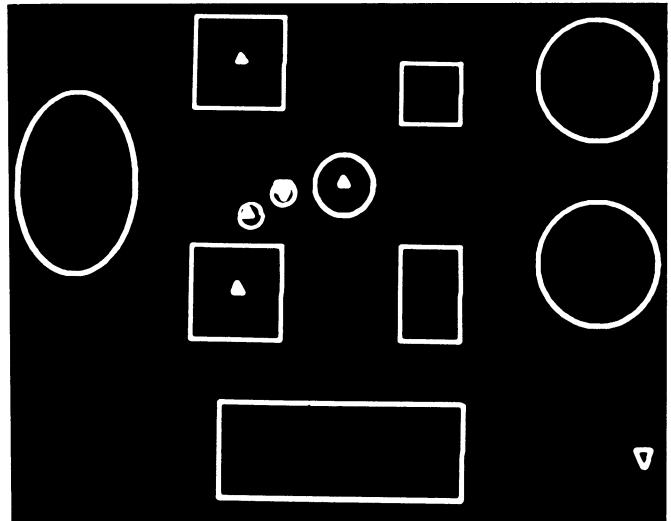
4

( 2<sup>ème</sup> séquence )

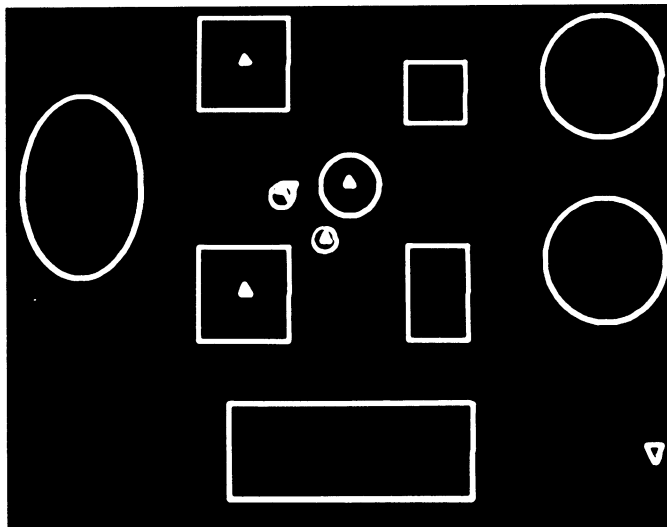




1



2



3

( 3<sup>eme</sup> séquence )



#### IV.4 - CONCLUSION

Généralement résolu par le développement de programmes de construction de mouvement [PAV76, FRO77, AKS78, MAL78] le problème de la prise en compte d'obstacles et de contraintes structurelles trouve ici une solution intéressante tant par la simplicité de sa mise en oeuvre que par sa grande souplesse.

En allégeant la charge des niveaux supérieurs de commande cette approche permet d'augmenter sensiblement la disponibilité du système de commande.

Le développement de procédures de déblocages, de définitions d'objets et de PSF offre la possibilité de disposer d'un système de commande adaptatif répondant aux besoins croissants en robots évolués.



## ANNEXE A1

MATRICE JACOBIENNE  $J_o(q)$  DU ROBOT VERTICAL 80





Les données géométriques du robot vertical 80 étant portées sur la figure (1.4) chapitre I, la matrice jacobienne de base  $J_o(q)$  s'écrit :

1ère COLONNE

$$J_o(1,1) = -S1S4S5l_E - C1 [C2l_2 + C23(l_3 + C5l_E) - S23 C4S5l_E]$$

$$J_o(2,1) = C1S4S5l_E + S1 [C2l_2 + C23(l_3 + C5l_E) - S23 C4S5l_E]$$

$$J_o(3,1) = 0$$

$$J_o(4,1) = 0$$

$$J_o(5,1) = 0$$

$$J_o(6,1) = 1$$

2ème COLONNE

$$J_o(1,2) = S1 [S2 l_2 + S23 (l_3 + C5 l_E) + C23 C4 S5 l_E]$$

$$J_o(2,2) = -C1 [S2 l_2 + S23 (l_3 + C5 l_E) + C23 C4 S5 l_E]$$

$$J_o(3,2) = C2 l_2 + C23 (l_3 + C5 l_E) - S23 C4 S5 l_E$$

$$J_o(4,2) = C1$$

$$J_o(5,2) = S1$$

$$J_o(6,2) = 0$$

3ème COLONNE

$$J_o(1,3) = S1 [S23 (l_3 + C5 l_E) + C23 C4 S5 l_E]$$

$$J_o(2,3) = -C1 [S23 (l_3 + C5 l_E) + C23 C4 S5 l_E]$$

$$J_o(3,3) = C23 (l_3 + C5 l_E) + S23 C4 S5 l_E$$

$$J_o(4,3) = C1$$

$$J_o(5,3) = S1$$

$$J_o(6,3) = 0$$



#### 4ème COLONNE

$$J_o(1,4) = (-S1 S23 S4 S5 + C1 C4 S5) l_E$$

$$J_o(2,4) = (C1 S23 S4 S5 + S1 C4 S5) l_E$$

$$J_o(3,4) = -C23 S4 S5 l_E$$

$$J_o(4,4) = -S1 C23$$

$$J_o(5,4) = C1 C23$$

$$J_o(6,4) = S23$$

#### 5ième COLONNE

$$J_o(1,5) = S1 (S23 C4 C5 + C23 S5) + C1 S4 S4 l_E$$

$$J_o(2,5) = -C1 (S23 C4 C5 + C23 S5) + S1 S4 S5 l_E$$

$$J_o(3,5) = (C23 C4 C5 + S23 S5) l_E$$

$$J_o(4,5) = -S1 S23 S4 + C1 C4$$

$$J_o(5,5) = C1 S23 S4 + S1 C4$$

$$J_o(6,5) = -C23 S4$$

#### 6ème COLONNE

$$J_o(1,6) = 0$$

$$J_o(2,6) = 0$$

$$J_o(3,6) = 0$$

$$J_o(4,6) = S1(S23 C4 S5 - C23 C5) + C1 C4 S5$$

$$J_o(5,6) = -C1(S23 C4 S5 - C23 C5) + S1 S4 S5$$

$$J_o(6,6) = C23 C4 S5 + S23 C5$$



Lorsque  $\mathcal{O}_E$  est choisi en  $\mathcal{O}_6$  i.e.  $l_E = 0$ , la matrice jacobienne de base  $J_o(q)$  se réduit à l'expression

$$J_o(q) = \begin{array}{c|ccc|ccc} -C1(C21_2 + C231_3) & S1(S21_2 + S231_3) & S1S231_3 & & & & \\ S1(C21_2 + C231_3) & -C1(S21_2 + S231_3) & -C1S231_3 & & & 0 & \\ 0 & C21_2 + C231_3 & C231_3 & & & & \\ \hline 0 & C1 & C1 & -S1C23 & -S1S23S4 + C1C4 & S1\delta + C1C4S5 & \\ 0 & S1 & S1 & C1C23 & C1S23S4 + S1S4 & -C1\delta + S1S4S5 & \\ 1 & 0 & 0 & S23 & -C23S4 & S23C5 + C23C4S5 & \end{array}$$

avec  $\delta = S23C4S5 - C23C5$



## ANNEXE A2

---

MATRICE JACOBIEENNE INVERSE  $J_o^{-1}(q)$  DU ROBOT

VERTICAL 80





La matrice jacobienne de base  $J_o(q)$  admet, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.5 (cf Relations 1.83-1.84) la décomposition :

$$J_o(q) = M(q) N(q) J_p(q)$$

Dans le cas du robot vertical 80,  $p$  est égal à 3 et les matrices  $M(q)$ ,  $N(q)$  et  $\tilde{J}_3(q)$  sont données par :

$$M(q) = \left[ \begin{array}{c|c} S^{03} & 0_3 \\ \hline 0_3 & S^{03} \end{array} \right] \quad \text{avec} \quad S^{03}(q) = \begin{bmatrix} -S1C23 & S1C23 & C1 \\ C1C23 & -C1S23 & S1 \\ S23 & C23 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(q) = \left[ \begin{array}{c|c} II_3 & -V \\ \hline 0_3 & II_3 \end{array} \right] \quad \text{avec} \quad V(q) = \begin{bmatrix} 0 & -S4S5l_E & C4S5l_E \\ S4S5l_E & 0 & -C5l_E \\ -C4S5l_E & C5l_E & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{J}_3(q) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & S3l_3 & 0 & & & \\ 0 & l_3 + C3l_3 & l_3 & & & 0_3 \\ C2l_2 & -C23l_3 & 0 & & & \\ \hline S23 & 0 & 0 & 1 & 0 & C5 \\ C23 & 0 & 0 & 0 & -S4 & C4S5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & C4 & S4S5 \end{array} \right]$$



Les inverses des matrices  $M(q)$  et  $N(q)$  étant immédiates (cf rel. 1.85), la recherche des expressions analytiques des éléments de  $J_0^{-1}(q)$  se réduit au calcul, notablement plus simple, de l'inverse de  $\tilde{J}_3(q)$  et au développement du produit des matrices  $\tilde{J}_3^{-1}(q) N^{-1}(q) M^{-1}(q)$ . En désignant par  $\bar{J}_{11}, \bar{J}_{12}, \bar{J}_{21}$  et  $\bar{J}_{22}$  les quatre blocs d'ordre 3 formant la matrice  $J_0^{-1}(q)$  soit :

$$J_0^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & & & \\ & \vdots & & \\ & & \bar{J}_{12} & \\ & & & \bar{J}_{22} \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\bar{J}_{11} = \frac{1}{S^3 \delta_1^2 l_2 l_3} \begin{vmatrix} -C_1 S_3 l_2 l_3 & -S_1 S_3 l_2 l_3 & 0 \\ -S_1 C_2 C_3 \delta_1 l_3 & C_1 C_2 C_3 \delta_1 l_3 & C_2 C_3 \delta_1 l_3 \\ S_1 \delta_1^2 & C_1 \delta_1^2 & -(S_2 l_2 + S_2 C_3 l_3) \delta_1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{J}_{12} = \frac{1}{S^3 \delta_1^2 l_2 l_3} \begin{vmatrix} -S_1 S_3 \delta_2^2 l_2 l_3 & C_1 S_3 \delta_3 l_2 l_3 & S_3 \delta_3 l_2 l_3 \\ (-S_1 S_2 C_3 S_4 + C_1 C_4) S_5 \delta_1 l_3 & (C_1 S_2 C_3 S_4 + S_1 C_4) S_5 \delta_1 l_3 & -C_2 C_3 S_4 S_5 \delta_1 l_3 \\ -C_1 \delta_4 - S_1 \delta_5 \delta_1 & -(S_1 \delta_4 + C_1 \delta_5) \delta_1 & S_4 S_5 \delta_1^2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{J}_{21} = \frac{1}{S_3 S_5 \delta_1^2 l_2 l_3} \begin{vmatrix} S_1 C_2 S_4 C_5 l_1^2 + C_1 S_3 \delta_6 l_2 l_3 & -C_1 C_2 S_4 C_5 l_1^2 l_3 + S_1 S_3 \delta_6 l_2 l_3 & -S_2 S_4 C_5 \delta_1 l_2 \\ -S_1 C_2 C_4 S_5 \delta_1 l_2 - C_1 C_2 C_3 S_3 S_4 S_5 l_2 l_3 & C_1 C_2 C_4 S_5 \delta_1 l_2 - S_1 C_2 C_3 S_3 S_4 S_5 l_2 l_3 & S_2 C_4 S_5 \delta_1 l_2 \\ -S_1 C_2 S_4 \delta_1 l_2 + C_1 C_2 C_3 S_3 C_4 l_2 l_3 & C_1 C_2 S_4 \delta_1 l_2 + S_1 C_2 C_3 S_3 C_4 l_2 l_3 & S_3 S_4 \delta_1 l_2 \end{vmatrix}$$



$$J_2 = \frac{1}{S_3 S_5 \delta_1 l_2 l_3} \begin{vmatrix} -S_5 \eta_{11} + C_4 C_5 \eta_{21} + S_4 C_5 \eta_{31} & -S_5 \eta_{12} + C_4 C_5 \eta_{22} + S_4 S_5 \eta_{32} & -S_5 \eta_{13} + C_4 C_5 \eta_{23} + S_4 C_5 \eta_{33} \\ S_4 S_5 \eta_{21} - C_4 S_5 \eta_{31} & S_4 S_5 \eta_{22} - C_4 S_5 \eta_{32} & S_4 S_5 \eta_{23} - C_4 S_5 \eta_{33} \\ -C_4 \eta_{21} - S_4 \eta_{31} & -C_4 \eta_{22} - S_4 \eta_{32} & -C_4 \eta_{23} - S_4 \eta_{33} \end{vmatrix}$$

où  $\eta_{ij}$  sont les éléments de la matrice :

$$\eta = \begin{vmatrix} S_1 S_3 (C_{23} \delta_1 - S_{23} \delta_2 l_E) l_2 l_3 & C_1 S_3 (-C_{23} \delta_1 + S_{23} \delta_2 l_E) l_2 l_3 & S_2 S_3 (-\delta_1 + \delta_3 l_E) l_2 l_3 \\ S_1 S_3 (-S_{23} \delta_1 - C_{23} \delta_2 l_E) l_2 l_3 & C_2 S_3 (S_{23} \delta_1 + C_{23} \delta_2 l_E) l_2 l_3 & C_2 S_3 (-\delta_1 + \delta_3 l_E) l_2 l_3 \\ -(S_1 \delta_7 + C_1 S_2 S_4 S_5 l_E) \delta_1 l_2 & -(S_1 \delta_7 - C_1 S_2 S_4 S_5 l_E) \delta_1 l_2 & C_2 S_4 S_5 \delta_1 l_2 l_3 \end{vmatrix}$$

et où

$$\delta_1 = C_2 l_2 + C_2 l_3$$

$$\delta_4 = (l_3 + C_3 l_2) C_4 S_5 + S_3 C_5 l_2$$

$$\delta_2 = C_2 C_3 C_4 S_5 + S_2 C_3 C_5$$

$$\delta_5 = (S_2 l_2 + S_2 l_3) S_4 S_5$$

$$\delta_3 = S_2 C_3 C_4 S_5 - C_2 C_3 C_5$$

$$\delta_6 = -C_2 C_3 C_4 C_5 + S_2 C_3 S_5$$

$$\delta_7 = S_3 l_3 - (C_3 C_4 S_5 + S_3 C_5) l_E$$

Lorsque  $\mathcal{O}_E$  est confondu avec  $\mathcal{O}_S$ , la matrice  $J_o^{-1}(q)$  s'écrit :

$$J_o^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{J}_1 & & 0 \\ \hline \bar{J}_2 & & \bar{J}_3 \end{vmatrix}$$



dans laquelle

$$\bar{J}_1 = \bar{J}_{11} \quad ; \quad \bar{J}_2 = \bar{J}_{12}$$

et où

$$\bar{J}_3 = \frac{1}{S_5} \begin{vmatrix} -(S_1 \delta_8 + C_1 S_4 C_5) & C_1 \delta_8 - S_1 S_4 C_5 & S_2 S_5 - C_2 S_4 C_5 \\ -(S_1 S_2 S_4 - C_1 C_4) S_5 & (C_1 S_2 S_4 + S_1 C_4) S_5 & C_2 S_4 S_5 \\ S_1 S_2 S_4 + C_1 S_4 & -(C_1 S_2 S_4 - S_1 S_4) & C_2 S_4 \end{vmatrix}$$

avec

$$\delta_8 = S_2 S_3 C_4 C_5 + C_2 S_3 S_5$$





**ANNEXE A3**

---

SYSTÈMES DE COORDONNÉES CONSERVANT L'OPÉRATEUR (Y).



Le problème posé est celui de rechercher les transformations susceptibles de fournir des systèmes de coordonnées pour lesquels l'opérateur ( $\checkmark$ ) défini au chapitre I (cf rel 1.52) reste invariant.

Désignons par S l'une des matrices orthogonales de ces transformations ; S doit satisfaire :

$$S \checkmark \lambda = \overline{S \checkmark \lambda} \quad (\text{A3.1})$$

relation qui exprime que l'opérateur ( $\checkmark$ ) est conservé dans le nouveau système de coordonnées S $\lambda$  obtenu à partir du système initial  $\lambda = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4|^T$  par la transformation S.

La matrice de l'opérateur ( $\checkmark$ ) peut être développée sous la forme :

$$\checkmark \lambda = [S^*_{1 \lambda} \quad S^*_{2 \lambda} \quad S^*_{3 \lambda}] \quad (\text{A3.2})$$

avec

$$S^*_{1} = \begin{bmatrix} s_1 & \vdots & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_2 & \vdots & s_1 \end{bmatrix} \quad S^*_{2} = \begin{bmatrix} 0_2 & \vdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -s_2 & \vdots & 0_2 \end{bmatrix} \quad S^*_{3} = \begin{bmatrix} 0_2 & \vdots & -s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_3 & \vdots & 0_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.3})$$

dans lesquelles s1, s2 et s3 sont les trois matrices de Pauli définies par

$$s_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad s_2 \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad s_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.4})$$

Et une condition équivalente à (A3.1) est que la matrice S commute avec chacune des matrices S<sup>\*</sup>i (i = 1,2,3) soit :

$$S S^* i = S^* i S \quad (i = 1,2,3) \quad (\text{A3.5})$$



Mettons S sous forme de quatre blocs d'ordre 2 :

$$S \cong \left[ \begin{array}{c|c} s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & s_{22} \end{array} \right]$$

pour satisfaire la relation (A3.5) lorsque  $i=2$ , la matrice S doit être de la forme :

$$S = \left[ \begin{array}{c|c} s_{11} & s_{12} \\ \hline -s_2 s_{12} s_2 & s_2 s_{11} s_2 \end{array} \right] \quad (\text{A3.6})$$

De plus, lorsque  $i=1$ , on peut établir

$$s_{ij} s_1 = s_1 s_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{A3.7})$$

ce qui impose à chacune des matrices  $s_{ij}$  d'être antisymétrique ou à éléments diagonaux égaux. Les deux seules formes simples pouvant être retenues pour les matrices  $s_{ij}$  sont :

$$s_{ij} = \pm \Pi_2 \quad s_{ij} = \pm s_1 \quad (\text{A3.8})$$

En utilisant la relation (A3.6), on montre que S doit avoir la forme de l'une des six matrices  $\pm S_1$ ,  $\pm S_2$  et  $\pm S_3$  où :



$$S1 = \begin{vmatrix} -s1 & O_2 \\ O_2 & s1 \end{vmatrix} \quad S2 = \begin{vmatrix} O_2 & II_2 \\ -II_2 & O_2 \end{vmatrix} \quad S3 = \begin{vmatrix} O_2 & -s1 \\ -s1 & O_2 \end{vmatrix} \quad (A3.9)$$

Ces matrices qui vérifient la condition (A3.1) sont telles que :

$$\begin{aligned} S1 S2 &= S3 & ; & & S2 S3 &= S1 \\ S3 S1 &= S2 & \text{et} & & Si Sj &= -Sj Si \end{aligned} \quad (A3.10)$$

Les trois systèmes de coordonnées obtenus par S1, S2 et S3 à partir du système initial forment alors avec ce dernier un ensemble de quatre systèmes  $\{\lambda, S1\lambda, S2\lambda, S3\lambda\}$  pour lesquels l'opérateur ( $\nabla$ ) est invariant. Notons l'invariance de cet opérateur pour l'ensemble des systèmes obtenus à partir du premier par une symétrie à l'origine.

Notons d'autre part, que l'accélération du vecteur  $\lambda$ , qui s'obtient en dérivant par rapport au temps, la relation (1.52) :

$$(1.52) \quad \dot{\lambda} = \frac{1}{2} \nabla \lambda \omega$$

peut être développée sous la forme :

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{4} \nabla \lambda \dot{\omega} - \frac{\omega^2}{2} \lambda \quad (A3.11)$$

avec

$$\omega^2 = \omega^T \omega$$

En effet, les relations (1.52) et (A3.2) permettent d'écrire :

$$2 \frac{d}{dt} \left[ \nabla \lambda \right] \omega = \left[ S1^* \nabla \lambda \omega \quad S2^* \nabla \lambda \omega \quad S3^* \nabla \lambda \omega \right] \omega$$

expression que l'on peut, en utilisant (A3.4) mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[ \nabla \lambda \right] \omega = - \frac{\omega^2}{2} \lambda \quad (A3.12)$$





## BIBLIOGRAPHIE



- [ABA63] L. ABADIE  
*Utilisation des quarternions pour la représentation des coordonnées angulaires.*  
Technique de Calcul Analogique et Numérique en Aéronautique  
Congrès de Liège, pp.342-346, 1963
- [AKS78] G.S. AKSENOV, D.K. VORNETSKAYA, V.N. FOMIN  
*A Construction of Program Movemnts of a Manipulator with the Aide of a Computer.*  
Engineering Cybernetics n°4, pp 40-45, 1978
- [ART76] I. I. ARTOBOLEVSKII ET ALL.  
*Principles Governing the Design and Motion of Sensing Robots*  
2d CISM IFTOMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators, pp.223-233, Warsaw, September 1976
- [BEJ74] A. K. BEJCZY  
*Robot Arm Dynamic and control*  
NASA Tech. Memo. 33-669, JPL. 15 février 1974
- [BEN80] A. B. BENHOUHOU, R. RAMHANI  
*Commande en temps réel d'un robot manipulateur*  
Rapport de projet AAS-ENSAE-CERT, Novembre 1980
- [BOU69] R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET  
*Commande optimale des processus*  
DUNOD - Tome 3, 1969
- [BRA75] I. C. BRAID  
*The synthesis of Solids Bounded by Many Faces*  
ACM, vol. 18, n°4, pp 209-216, avril 1975
- [CAZ77] M. CAZAL  
*Contribution à l'étude de systèmes d'assemblage dans le domaine de la Robotique.*  
Thèse de Docteur de Spécialité E.E.A., Toulouse, Juillet 1977



- [CRA79] J. J. CRAIG, M. H. RAIBERT  
*A systematic Method for Hybrid Position/ Force Control of a manipulator.*  
Proc. IEEE Computer Software Applications Conf., Chicago, 6-8/11/79
- [DIL74] S. R. DILLON  
*Automated Equation Generation and its Application to Problems in Control.*  
J.A.C.C., Conference Austin, June 1974, pp. 572-580
- [FOU80] A. FOURNIER  
*Génération de mouvements en Robotique. Application des Inverses Généralisées et des Pseudo Inverses*  
Thèse d'Etat, Mention Sciences, Montpellier, avril 1980
- [FRA64] J. S. FRAME  
*Matrix Operations and Generalized Inverses*  
IEEE Spectrum, pp 209-220, March 1964
- [FRE75] E. FREUND  
*The structure of Decoupled Non Linear Systems.*  
International Journal of Control, vol.21, n°3, pp 443-450, 1975
- [FRE76] E. FREUND, M. SYBRE  
*Control of Industrial Robots by Mean of Microprocessors.*  
IRIA Conference, New Trends in Systems Analysis, Rocquencourt, 1976
- [FRO77] K. V. FROLOV, A. A. KOBRINSKY, A. E. KOBRINSKY  
*A computer Guidance of Manipulators*  
7th International Symposium on Industrial Robots, pp 161-1968,  
Tokyo, Octobre 1977



- [GIL77] J. CH. GILLE, P. DECAULNE, M. PELEGRIN  
*Theorie et calcul des asservissements linéaires.*  
 DUNOD, pp 270-273, 1967
- [GOR79] B. GORLA  
*Architecture des Principaux Robots Manipulateurs*  
 Note Interne LAAS-CAR n°79-I-16, Toulouse, Juin 1979
- [HEW78] J. R. HEWIT, J. PADOVAN  
*Decoupled Feedback Control of a Robot and Manipulator Arms*  
 Proc. 3rd CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots  
 and Manipulators, Udine, 12-15 septembre 1978
- [HOO65] W. W. HOOKER, G. MARGULIES  
*The dynamics Attitude Equations for a n-Body Satellite*  
 The Journal of the Astronautical Sciences, vol.12, n°4, pp 123-128  
 Hiver 1965
- [HUB81] Y. HUBERT  
*Simulation et commande de Robots industriels.*  
 Thèse de Docteur ingénieur ENSAE (à paraître)
- [KAH69] M. KAHN  
*The Near-minimum-time control of open-loop articulated kinematic  
 chains.*  
 Ph.D. Thesis, Stanford University, December 1969
- [KHA78a] O. KHATIB, M. LLIBRE, R. MAMPEY  
*Fonction "décision-commande" d'un robot manipulateur*  
 Rapport Scientifique n°2/7156 DERA-CERT, Toulouse, Juillet 1978
- [KHA78b] O. KHATIB, J. F. LE MAITRE  
*Dynamic control of Manipulators Operating in a Complex Environment*  
 3rd CISM-IFTOMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and  
 Manipulators, pp 267-282, Udine, September 1978





- [LIK71] P.W.LIKINS  
*Passive and Semi active attitude stabilizations - flexible  
Spacecraft.*  
AGARD - LS - 45 - 71. Paper 3b Octobre 1971
- [LLI81] M.LLIBRE ET AL.  
*Etude et mise en oeuvre de lois de commande dynamique coordonnée  
sur un robot industriel.*  
Rapport de contrat DGRS n° 78-7 3186 - DERA - (à paraître)
- [LUH80] J.Y.S.LUH, M.W.WALKER, R.PAUL  
*Resolved acceleration control of mechanical manipulators*  
IEEE Trans. on Automatic Control, n°3, pp 468 474, june 1980
- [MAK76] A.MAKINO  
*A kinematical classification of robot manipulators*  
6th Intert. Symposium on Industrial Robots, pp F2(11-24)  
Nottingham, March 1976
- [MAL78] V.A.MALYSHEV, A.V.TIMOFEYEV  
*Algorithms for Construction of Programmed Manipulator Motions  
with Consideration of Constructional Constraints and Obstacles.*  
Engineering Cybernetics, n°6, pp 46-53, 1978
- [MAR73] B.R.MARKIEWICZ  
*Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison  
with conventional Position servo for a Computer Controlled Manipulator.*  
NASA Tech., Memo 33-601, JPL. 15 mars 1973
- [MIN70] D.L.MINGORI  
*A Stability Theorem for Mechanical Systems with Constraint Damping*  
Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, pp 253-258
- [MOE73] M.L.MOE  
*Kinematics and Rate Control of the Rancho Arm.*  
Proc. 1st CISM IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and  
Manipulators, Udine, Septembre 1973



- [MOR73] M. MORAND  
*Géométrie spinorielle*  
Masson et Cie, Editeurs, pp 72-88, 1973
- [NEV73] J. L. NEVINS, D. E. WHITNEY  
*The force vector assembler concept.*  
Proc. 1st CISM IFToMM symposium on Theory and Practice of Robots  
and Manipulators. Udine, Septembre 1973.
- [NOB77] B. NOBLE, J. W. DANIEL  
*Applied linear algebra*  
Englewood Cliffs, NJ 07632, Prentice Hall, pp 156 157, 1977
- [PAU72] R. PAUL  
*Modelling, trajectory calculation and servoing of a computer  
controlled arm.*  
Ph.D. Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford  
University, November 1972
- [PAU79] R. PAUL ET AL.  
*Advanced Industrial Robot Control Systems*  
2d Report TR EE 79-35, Purdue University, West Lafayette, July 1979
- [PAV76] V. A. PAVLOV, A. V. TIMOFEYEV  
*Construction and stabilization of programmed movements of a mobile  
robot manipulator.*  
Engineering Cybernetics, n°5, pp 70-79, 1976
- [PELL80] F. PELL, H. EL HAJJAR  
*Compressions des coefficients dynamiques intervenant dans la  
commande des robots manipulateurs.*  
Projet de fin d'Etudes ENSEEIHT-CERT - Toulouse, 1980
- [PIE68] D. L. PIEPER  
*The kinematics of Manipulators under computer control.*  
Ph.D. Stanford University, Stanford, Octobre 1968



- [PIE69] D.L. PIEPER, B. ROTH  
*The kinematics of manipulators under computer control.*  
Proceedings 2nd International Congress on the Theory of Machines  
and Mechanisms, vol 2, pp 159-168, 1969
- [POR69] W.A. PORTER  
*An Algorithm for Inverting Linear Dynamic Systems*  
IEEE Transactions on Automatic Control Vol.AC-14, n°6,  
pp. 702-704, Décembre 1969
- [PRO67] PROCEDURE ALGOL  
en Analyse Numérique (CNRS), 1967
- [RAI77] M.H. RAIBERT  
*Analytical Equations vs. Table Look-Up for Manipulation : A  
Unifying Concept.*  
Proc. IEEE Conference on Decision and Control. New-Orleans  
pp. 576-579. Décembre 1977
- [RAI78] M.H. RAIBERT & B.K. HORN  
*Manipulator Control Using the Configuration Space Method.*  
The Industrial Robot. pp. 69-73. Juin 1978
- [REN75] M. RENAUD  
*Contribution à l'Etude de la Modélisation et de la Commande des  
Systèmes Mécaniques Articulés.*  
Thèse de Docteur-Ingénieur. Université P. SABATIER, Toulouse.  
19 Décembre 1975
- [REN79a] M. RENAUD & J. ZABALA - ITURRALDE  
*Robot Manipulator Control.*  
Proc. 9th International Symposium on Industrial Robots  
Washington. pp. 463-475. 13-15 Mars 1979



- [REN79b] M. RENAUD  
*Coordinated Control of Robots-Manipulators : Determination of the Singularities of the Jacobian Matrix.*  
 Proc. 1st Yugoslav Symposium on Industrial Robotics and Artificial Intelligence. Dubrovnik. pp. 153-165. 13-15 Septembre 1979
- [REN80a] M. RENAUD  
*Calcul de la Matrice Jacobienne Nécessaire à la Commande Coordonnée d'un Manipulateur.*  
 Mechanism and Machine Theory. Vol. 15. n°2. pp. 81-91. 1980
- [REN80T] M. RENAUD  
*Contribution à la Modélisation et à la Commande Dynamique des Robots Manipulateurs.*  
 Thèse d'Etat, Spécialité Automatique, Toulouse, Septembre 1980
- [ROT73] B. ROTH, J. RASTEGAR & V. SCHEINMAN  
*On the Design of Computer Controlled Manipulators.*  
 1<sup>st</sup> CISM-IFTOMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators. Vol.1, pp.93-113, Udine, September 1973
- [ROT76] B. ROTH  
*Performance Evaluation of Manipulators from a Kinematic Viewpoint.*  
 Cours de Robotique 1, IRIA, Toulouse September 1976
- [RUM70] V. V. RUMIANTSEV  
*On the optimal Stabilisation of Controlled Systems*  
 PMM, Vol.34, n°3, pp 440-456, 1970
- [SAR76] G. N. SARIDIS, C. S. G. LEE  
*Heuristic control in trainable manipulators*  
 1976 Joint Automatic Control conf., San Francisco, pp 712-716, 1976
- [SAR77] G. N. SARIDIS, H. E. STEPHANOU  
*A hierarchical approach to the control a Prosthetic Arm.*  
 IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics, vol SMC 7, n°6  
 pp 407 410, Juin 1977





- [SHI76] B. SHIMANO, B. ROTH  
*Ranges of Motion of Manipulators*  
2d CISM IFToMM symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, pp 17-26, Waisaw, September 1976
- [SHI78] B. SHIMANO, B. ROTH  
*Dimensional Synthesis of Manipulators*  
3d CISM IFToMM Symposium on Thoery and Practice of Robots and Manipulators, pp 166-187, Udine, September 1978
- [SON80] E. D. SONTAG  
*On generalized Inverses of Polynomial and Other Matrices*  
IEEE Trans. on Automatic Control, n°3, pp 514-517, June 1980
- [STU73] R. STURGES  
*Tele operators arm design program*  
MIT, C.S. Draper Laboratory, Cambridge, Report n°3/2746, 1973
- [TAY79] R. H. TAYLOR  
*Planning and execution of straight line manipulator trajectories*  
IBM Res. Develop., vol 23, n°4, pp 424-436, July 1979
- [TIM76] A. V. TIMOFEEV, YU V. EKALO  
*Stability and stabilization of programmed motions of a manipulator Robot*  
Automatika Telemekhanika, n°10, pp 148-157, 1976
- [UIC68] J. J. UICKER JR.  
*Dynamic Behaviour of spatial linkages*  
Trans. of the ASME, n°68, Mech.5, pp 1-15, 1968
- [UTK71] V. I. UTKIN  
*Equations of the Slipping Regime in discontinuous. Systeme I*  
Automatikai Telemekhanika, n°12, pp 42-54, December 1971



- [UTK77] V. I. UTKIN  
*Variable structure systems with sliding modes*  
IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC-22, n°2, avril 1977
- [VER64] J. F. VERNET  
*Elements de mécanique générale pour l'ingénieur*  
Masson et Cie, Editeurs, p.160, 1964
- [VER75] A. F. VERESHCHAGIN, V. L. GENEROZOV, V. B. KRUCHEROV  
*Algorithm for control of velocity vector manipulator*  
Engineering Cybernetics, n°3, pp 51-55, 1975
- [VER78] A. F. VERESCHAGIN, V. L. GENEROZOV  
*Design of trajectories of operating device of Automatic manipulator.*  
Engineering Cybernetics, n°2, pp 55-64, 1978
- [VUK73] M. VUKOBRATOVIC  
*Legged locomotion robots : mathematical models control, algorithms and realizations.*  
Survey paper- 5th IFAC Symposium on Automatic Control in Space  
Gênes, '8-8 juin 1973
- [VUK75] M. VUKOBRATOVIC  
*Legged locomotion robots and anthropomorphic mechanisms.*  
Monographie. Mihailo Pupin Institute, Belgrade, 1975
- [WHI69] D. E. WHITNEY  
*Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses.*  
IEEE Trans. on Man Machines Systems, 10, vol.2, pp 47-53, Juin 1969
- [WHI72] D. E. WHITNEY  
*The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators.*  
Transactions of ASME, serie F, pp 303-309, December 1972



- [YOU78] K. D. YOUNG  
*Controller design for a manipulator using theory of variable structure systems.*  
IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetic, vol SMC 8, n°2  
pp 101-109, Février 1978
- [YUA78] J. S. C. YUAN  
*Dynamic decoupling of a Remote manipulator system.*  
IEEE Trans. on Automatic Control, vol AC-23, n°4, pp 713-717  
Août 1978.
- [ZAB78] J. ZABALA ITURRALDE  
*Commande des robots manipulateurs à partir de la modélisation de leur dynamique.*  
Thèse de 3ème cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse, Juillet 1978





